Basic数学 1998, 5,

凸多面体の硬さ*

N.P.ドルビリン／小島英夫訳

紙で作った多面体の模型を張り合わせたり，手でいじったりしたとき，その硬さに気が付いたり，さらにそれについて考えてみたりした人は多いだろう．そして，模型の硬さが偶然に決まるの

ではなく，複雑で，明瞭でないにしても，多面体の面の間の関係によって決まるらしいことが直観的に分かるだろう．多面体の硬さについての疑問は，幾何学の古い問題であり，非常に複雑な問題なのである．それは最近になってようやく解明された問題であるが，その解決の第一歩を踏み出したのは，有名なパリのエコール・ポリテクニークの卒業生である23歳のコーシー（Augustin Louis Cauchy (1789-1857)）で，175年前のことである．

1807年にエコール・ポリテクニークを卒業したコーシーは《数学の全領域における輝かしい業績によって，ほとんどガウスに匹敵する》．ドイツの数学者クライン（Felix Klein (1849-1925)）は，このようにフランスの数学者をガウス（Carl F. Gauss (1777-1855)）と《ほとんど同列に》置いている．フランスとドイツの数学の相互関係が激しい競争のうちに発展し，相手の功績の評価が決して気前の良いものとはならないことを考えると，これはコーシーの業績の特別な意味を特に高く評価していることを示している．

彼に最高の数学者の称号を与えたコーシーの業績は，基本的に解析学，代数学，数理物理学，力学に関するものである．コーシーの巨大な研究成果は，膨大な25巻の全集に収められているが（彼の伝記によれば，コーシーの論文は789編である），彼の幾何学に関する研究は，1813年に「エコール・ポリテクニーク雑誌」に発表された《多角形と多面体について》を除いては知られていないのではないだろうか．

一意性に関するコーシーの定理

われわれがこれから取り上げるコーシーのこの論文は，次のようなありふれた問題を取り扱っている：多面体の面とその貼り合わせの順序は，多面体の形とどのような関係があるか？　例を使ってこの問題の意味を明らかにしよう．二つの多面体を考える：一つは立方体の基礎の上に方形屋根を持った塔（図１）で，もう一つは同じ面からできているが凹型の屋根を持った塔（図２）である．この二つの多面体は，隣接する面が貼り合わせの順序を含めてまったく等しいのに，互いに合同でないことは明らかである．

コーシーは，二つの凸多面体に話を限れば，同じような状況は起こりえないことを証明した．

コーシーの定理《相隣る面が同じ順序で同等な二

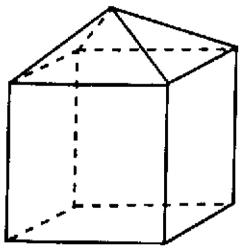


図１

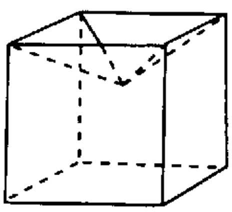


図２

※　クヴァント，1988，No.5，6～14pp

つの凸多面体は合同である.》

この定理を証明するために(その概要は以下に示す),若いコーシーは新しい方法を考案した.この方法はアカデミー会員アレクサンドロフ(А. Д. Александров)に言わせると「幾何学だけしか知らないものとしては,最も美しい推論の一つである.」それが実際に美しい推論であることは,のちにもう一つのこれと類似の,標準的な一意性の証明法の一つである多面体の定理において明らかになるだろう.

オイラーの仮説

面が与えられたとき,多面体の形が一意的に決まるか,あるいは,与えられた面が変わらなくても表面は変わり得るか,という問題は,コーシー以前の数学者の興味を引いていた.

偉大なオイラー(Leonhard Euler (1707-1783))も,この一意性の問題を考察した.1766年に,彼は次の仮説を述べている:《閉じた空間図形は,壊れないかぎり変化しない》.オイラーが《閉じた空間図形》というのは,今の言葉で言えば閉じた面のことである.オイラーの仮説それ自体は,多面体表面だけについてのものではない.しかし,多面体に関しても,この仮説の正当性を認めることは最も基本的なことであった.その正当性は何世紀にもわたる多面体の取り扱いの経験に基づいており,公理とも考えられるものである.

単純な多面体

多面体表面の不変性についての問題は解決困難なように見えたが,それに取り掛かる前に幾つかの概念を明確にしておく必要がある.ここで多面体というのは,学校で習うようないくつかの概念で限られた物体をいうのではなく,それらの多角形できた表面である;さらに,その有限の数の有限の多角形を貼り合わせて作った多面体は,その任意の面の各稜が一つの面とだけ隣り合っているとする.閉じているという条件は,当然充たされているとする.例えば,教室で学ぶような多面体—プリズム,ピラミッド,台形などは閉じている.上蓋のない小物入れの箱は閉じた多面体ではない.しかし,それに蓋をつけると閉じた多面体ができる.

われわれはまた,次のように言うこともできる.ここで定義した多面体は,数学者の言うトポロジー的な球である.普通の《丸い》球が膨らんだボールならば,《トポロジー的な球》はそれから空気を抜いたようなものである.換言すれば,われわれが多面体と呼ぶのは,それがゴムでできているとすると,破いたり,貼り合わせたりしないで,普通の丸い球に変形できるものである.そのような多面体を《単純》であると言うことにする.全ての凸多面体,特に教室で取り扱うものは,単純な多面体であり,図1と図2の多面体もそうである.図3には,単純でない,トーラス型の多面体を示した.

多面体は,それが単純であるか,そうでないかに関係なく,非常に強く《湾曲》していて,ときには理解するのが困難なことがある.ところが,それが単純であろうとなかろうと,それを見ないでも多面体について話せるのは,注目すべきことである.だれかが,われわれの知らない多面体Xについて,その頂点の数B,稜の数Pおよび面の数Γを教えたと仮定しよう.すると,次式で定義した多面体Xのオイラー標数と呼ばれる数$\Phi(X)$を使って,多面体Xが単純であるかどうかを,確実に知ることができる:

$$\phi(X)=B-P+\Gamma.$$

多面体はそのオイラー標数が2に等しいときにだけ単純である.単純でない多面体に対しては,オイラー標数は0より大きくならない.特に,トーラス型の多面体は,オイラー標数が0である(図3).

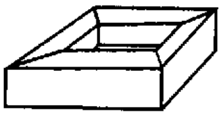


図3

多面体のたわみ易さ

ここで,いくつかの多角形を接着テープで貼り合わせたボール紙の多面体を考えよう(当然,有限で,閉じた,単純な多面体である).明らかに,各稜が柔軟に接続されているので,任意の二つの隣り合った面は,それらが他の面と貼り合わせてなければ,本のページのように,共通の稜のまわりに回転できる.

面が多面体の形に貼り合わされたとき,次のような問題が生ずる:連続的な変化で,変形に際して二つの面のなす角(面間角)を変えるだけで,全ての面を変えずに多面体を変形することは可能か? もし,一つの多面体でそのような変形が可能ならば,それを《たわむ》多面体,そうでなければ《たわまない》多面体と呼ぶことにする.

このようにして,多面体のたわみは,もしそれが一般に可能ならば,面間角の変化に関係がある.そして,一つの稜を境に隣り合う二つの面が任意の角度をなすことが可能でも,他の面との関係でその自由度が失われることもあり得る.オイラーはこのような《もっともらしい考察》によって,閉じた多面体がたわまないという仮説に到達したのかもしれない.

単純な多面体のたわみ易さについての問題は,オイラーから2世紀後に初めて解決した.最近,たった十余年前に,オイラーの多面体に関する仮説が正しいのか,正しくないのかが解決した.仮説は正しいことが分かった.1975年に明らかにされたように,

《殆ど全ての》単純な多面体はたわまない.

しかし,《殆ど全ての》である.つまり,まだ全ての多面体ではなく,ある意味で《圧倒的多数》の多面体がである.2年たって,1977年にアメリカの幾何学者コネリー(R.Connely)が,たわむ多面体の最初の例を作ってオイラーの仮説の反証を示した.

たわむ多面体の発見は非常に驚くべきことではない,と思う人がいても不思議ではない.とくに,楽器,例えばバンヤン(一種のアコーディオン)の皮袋を思い浮かべるとそうかもしれない.しかし,この連想は今の問題では適切でない.なぜならば,バンヤンの皮袋はその素材の皺と弾性によって《動作》するからである.もし皮袋が硬い板でできており,互いに小さな蝶番(蝶つがい)で止められていれば,楽器は演奏できないだろう.そんな皮袋は,容易に分かるように,延びも縮みもしないだろう.

とはいえ他の理由で,たわむ多面体を皮袋として使うことはできない.その訳は,これまでに知られている,たわむ多面体の集合は,いくつかの予期しなかった特性をもっているからである:閉じた多面体の体積はたわみに際して変化しない.すなわち,多面体は《息をしない》のである.これが普遍的に成り立つ,と仮定することができる:多面体の体積はたわみに際して変化しない.

さらに,コーシーの定理によって,たわむ多面体は凸多面体ではないであろう,と言える.

実際,一つの多面体がたわみ得ることは,同じ面を同じ順序で,しかし異なる面間角で貼り合わせた多面体が存在することを意味する.すると,元の多面体が凸ならば,すこし角度の違った多面体も凸である.しかし,これは,二つの凸多面体が合同であるというコーシーの定理に反する.

凸多面体についてのコーシーの補助定理

コーシーの定理を証明するためには,多面体がどういうものかを注意深く観察することが有益である.多面体についての定理を取り扱ったコーシーの研究の表題に《多面体》という言葉が無いのは偶然ではないのである.端に蝶番をつけた棒で作られた単純な多角形を考えよう.三角形の場合には,棒の長さがそれらの間の角度を決定し(三角形の合同の第三の特徴である),構造は剛性である.この自明な幾何学的事実の実際の応用に,われわれはしばしばお目にかかる:大きな荷重のかかる型枠構造物(橋の形,クレーンのブーム,建物の梁など)において,剛性を高めるためには三角形の要素を使うことが不可欠である.

多数の辺を持った多角形の場合には，辺の長さはそれらの間の角度（頂角）を決定せず，したがって多角形の形を決定しない．さらにコーシーは，彼の定理を証明する際に重要だと思われる一つの事実に注目した．

二つの n-凸多角形 $A=A_1A_2\cdots\cdots A_n$ および $B_1B_2\cdots\cdots B_n$ の対応する辺が，等式 $A_1A_2=B_1B_2$，……，$A_{n-1}A_n=B_{n-1}B_n$，$A_nA_1=B_nB_1$ を充たすとする．角度の関係 $\angle A_i>\angle B_i$ あるいは $\angle A_i<\angle B_i$ に応じて，第一の多角形の各頂点 A_i に符号〈＋〉あるいは〈－〉を付ける．$\angle A_i=\angle B_i$ ならば，頂点 A_i は無視する．コーシーの補助定理を述べる前に，次の事実を注意しておく：合同でない多角形の場合には符号の付いた頂点の数は4以上で，そうでなければ（容易に証明されるように）多角形 A と B は合同で，符号の付いた頂点は一つも存在しない．

補助定理1．《二つの凸多角形の対応する辺が等しく，対応する頂角の中に等しくないものがあるとする．すると，多角形の頂点を巡回したとき，対応する頂角の差（$\angle A_i-\angle B_i$）は4回以上符号を変える．》

多角形の頂点を巡回したときの符号変化の数は偶数で，かつ0に等しくはない，ことは明らかである．したがって，この補助定理を証明するには，符号変化の数が2に等しくないことを示せばよい．証明の概要を説明しよう．

この前提が成り立つときには，符号変化の数が2であると仮定しよう．すると，多角形 A を次のような二つの部分に分けることができる：一つ

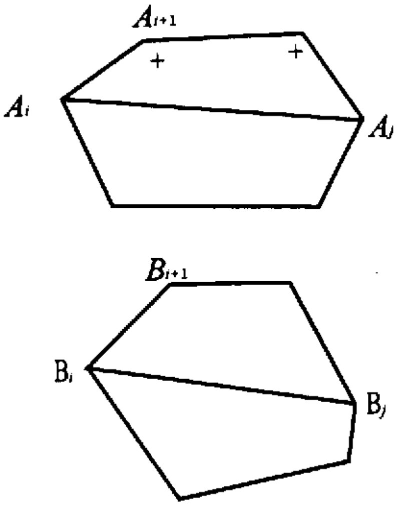


図4

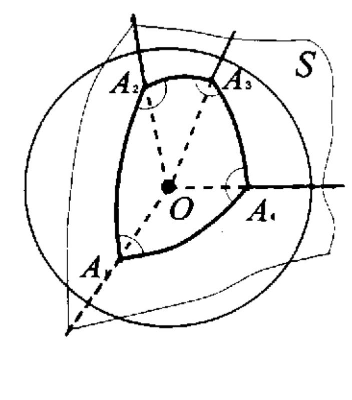
の部分は頂点 $A_iA_{i+1}\cdots\cdots A_j$ に符号〈＋〉が付けられており，〈－〉の付いた頂点は一つもない；他の部分は頂点 $A_jA_{j+1}\cdots\cdots A_i$ に符号〈－〉が付けられており，符号〈＋〉の付いた頂点は一つもない（図4）．

部分 $A_iA_{i+1}\cdots\cdots A_j$ は対応する多角形 B の部分 $B_iB_{i+1}\cdots\cdots B_j$ から，それらの頂角を大きくすることによって得られる．そのような変形をこの部分に加えると，その部分が張る弦は長くなることは明らかであろう，すなわち $A_iA_j>B_iB_j$．（この事実の厳密な証明はかなり長たらしいので，ここでは省略する）．

他方で，多角形 A の第二の部分 $A_jA_{j+1}\cdots\cdots A_i$ は多角形 B の対応する部分 $B_jB_{j+1}\cdots\cdots B_i$ から，それらの頂角を小さくすることで得られる．このときその部分が張る弦は短くなる．すなわち $A_iA_j<B_iB_j$．二つの互いに矛盾する不等式は，符号変化の数がちょうど2であるという仮定が正しくないことを示している．したがって，符号変化の数は4より少なくはないが，これも証明する必要がある．

以上の議論は補助定理1についてのもので，これはコーシーの定理を証明するために必要であったのだが，他方で球面上の凸多角形にたいしても成り立つ．その状況設定と証明は，上に述べたものと同様であり，対応する概念を定義するだけで充分である．

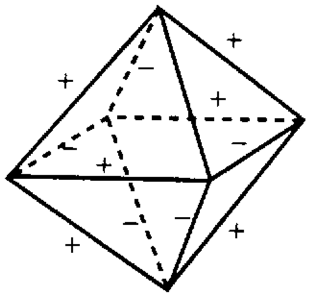
《球面多角形》の決定は平面多角形の決定と完全に対応する．その際に注意することは，第一に，球面多角形の《辺》は大円の弧であり，辺の《長さ》は弧の長さである．第二に，球面多角形の《頂角》は弧状の辺に交点で引いた接線の間の角である．明らかに，辺の間の角は対応する大円の面の間の角に等しい（図5）．第三に，《凸》球



面多角形は，考えている多角形のおのおのの辺弧を含む大円の片側だけにある．

コーシーの基本補助定理

コーシーの定理の条件を充たす二つの多面体が，合同でないと仮定しよう．すると，対応する二つの2面角の間に等価でない対が存在する筈である．考えている多面体の片方の稜に，その稜の2面角が他方の多面体の対応する2面角より大きいか，小さいかに応じて，符号〈+〉あるいは〈−〉を付けることにする（図6）．対応する2面角が等しい稜には，符号を付けないことに注意しておこう．



あの，またはこの符号の付いた稜が交わる，多面体の任意の頂点Oを選び，その点を中心とする球Sを描く．その球の半径を充分に小さく取って，球Sが頂点Oを含む面と稜とだけ交わり，多面体の他の面や稜とは交わらないようにする．明らかに，頂点Oで立体角を作る多面体の面は，球S上に（球面）凸多角形Mを切り取り，その各頂角は多面体の各2面角に等しい．他方の多面体の対応する頂点O′を中心に同様な半径を持つ球S'を作ると，その上には（球面）多角形M'が切り取られ，その辺は対応する多角形Mの対応する辺にそれぞれ等しい．辺が等しいことはコーシーの定理の条件からの帰結である：多面体の対応する頂点には，対応する等しい稜が交わらなければならない．

ここから，補助定理1のときと同じ論法を用いる．一意性についてのコーシーの定理が正しくないと仮定する：すなわち，一つの稜が符号〈+〉あるいは〈−〉が付けられており，補助定理1に対応して，ある頂角に符号を付けられた稜が集まって，その頂点の周りを巡回したときの稜の符号変化の数は4より小さくはない．

この分かりやすいコメントから定理の証明までには，まだ長い道のりがあるように見えるかもしれない．しかしここで，コーシーは巧みな方法を偶然にも発見し，それを使うと証明はテクニックの問題でしかなくなる．次の命題が正しいことが明らかになった．

補助定理2．《閉じた凸多面体の稜に，符号〈+〉あるいは〈−〉が付けられているとする．例えば，一本の着目した符号の稜が交わる多面体の全ての頂点を取り出す．すると，取り出した頂点の中には，その周りを巡回したときに符号変化の数が4により少ないものが必ず存在する．》

例えば，図6では八面体の稜に符号が付けられているが，符号変化の数が2に等しい頂点が二つある．

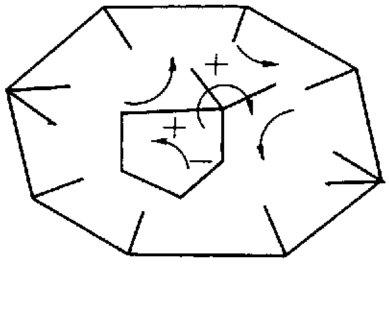
基本補助定理を証明する道筋は，全ての稜の符号を考慮するよりも，部分的な状況を考察する方が分かりやすい．そこで，全ての稜があの，あるいはこの符号を付けられていると仮定する．前と同様に，頂点の数をB，稜の数をP，多面体の面の数をΓ，全ての頂点の周りを巡回したときの符号変化の全数をNとする．補助定理2を証明するには，次式を示せば充分である．

$$N<4B.$$

われわれはコーシーにしたがって，より強い条件である次の不等式を証明する：

$$N\leq 4B-8.$$

全ての頂点の周りを巡回したときの符号変化の数Nは，全ての面の周りを巡回したときの符号変化の総数に等しいことが容易に分かる．これは，頂点の周りを巡回したときの相隣る稜の対は，同時に対応する面の周りを巡回したときの相隣る稜の対に等しく，逆も真であるからである（図7）．



Γ_n で多面体の n-角面の数を表すことにする：$n\geq 3$. すると，

$$\Gamma=\Gamma_3+\Gamma_4+\Gamma_5+\Gamma_6+\cdots. \tag{1}$$

明らかに，n-角形の周りを巡回したときの符号変化の数は n が偶数のときは n より大きくはなく，n が奇数のときは $n-1$ より大きくはない．それゆえ，

$$N\leq 2\Gamma_3+3\Gamma_4+4\Gamma_5+5\Gamma_6+6\Gamma_7+\cdots. \tag{2}$$

各稜は二つの面に接するから，

$$2P=3\Gamma_3+4\Gamma_4+5\Gamma_5+6\Gamma_6+7\Gamma_7+\cdots. \tag{3}$$

オイラーの公式を次の形に書き直す：

$$4B-8=4P-4\Gamma. \tag{4}$$

式(4)に関係式(3)と(1)を代入すると；

$$4B-8=2(3\Gamma_3+5\Gamma_5+\cdots)-2(2\Gamma_3+2\Gamma_4+2\Gamma_5+\cdots)=2\Gamma_3+4\Gamma_4+6\Gamma_6+\cdots. \tag{5}$$

関係式(5)で Γ_n の係数は $2(n-2)$ に等しく，したがって $n\geq 3$ のときは，不等式(2)の右辺の Γ_n の係数である n より一つ小さい数（$n-1$）より小さくはない．それゆえ，(2)と(5)から，求める不等式 $N\leq 4B-8$ が得られる．

補助定理 2 を，全ての符号を付けた稜だけでない，一般的な場合に証明することは，一般的に言って，補足的な技術上の困難さを抱えており，ここでは省略する．

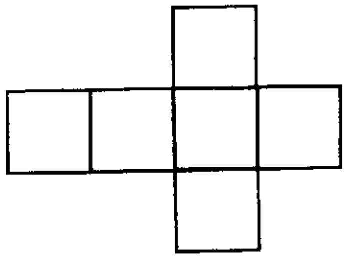
補助定理 2 を証明するときに，多面体が凸であるという条件を使わなかったことを注意しておこう：この補助定理は任意の，単純な閉じた多面体に対して成り立つ．コーシーの定理の多面体が凸であるという条件は，補助定理 1 を使うときにだけ重要である．

結論をまとめよう．コーシーの定理が正しくないとすると，補助定理 1 によって，稜には補助定理 2 によって許されない符号配置が現われる．コーシーの定理の証明は，まさに，証明自体の基礎的なアイデアの説明で完結する．

完全性についてのアレクサンドロフの定理

コーシーの研究が出版されたときには，彼の科学的な関心はこの領域から遠ざかってしまっていた．多面体の理論における透徹した，深淵な結果は，幾何学者集団の中心人物，アカデミー会員アレクサンドロフ(А. Д. Александров)によって得られた．1939年にアレクサンドロフは，貼り合わせて凸多面体を作ることのできる展開図が持つべき条件について定理を証明した．

図 8 を見よう．これが立方体の展開図であることはすぐに分かるだろう．



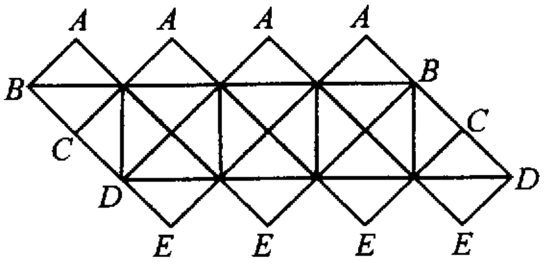
ところが，図9 a に示された展開図が，やはり立方体の展開図であることを理解するのはかなり難しい．図には，頂点に符号を付けて，貼り合わせた側面と頂点に対応することを表している（図9 b）．次のことに注意しよう：展開図の多角形はそれを貼り合わせて得られる多面体の面とは必ずしも一致しないことである．そのとき，多面体の面は展開図の多角形の一つあるいは幾つかの断片から構成される．また，展開図の多角形の全ての頂点は，必ずしも多面体の頂点になるわけではなく，多面体の面の中や稜の中に《隠れて》しまうかもしれない．

任意の展開図を考え，すなわち紙から切り取られた幾つかの凸多角形を取り上げ，それらのどの辺が他の多角形のどの辺と貼り合わせられるのかを示そう．貼り合わせる辺は，同じ長さでなければならないだろう．貼り合わせる順序についての指示に従って多角形を貼り合わせよう（展開図の多角形は折曲げてよいとする）．次のような疑問が生ずる：このような方法で凸多面体を作ることができるのは，どのような展開図だろうか？多面体ができるためには，二つの条件が必要である：

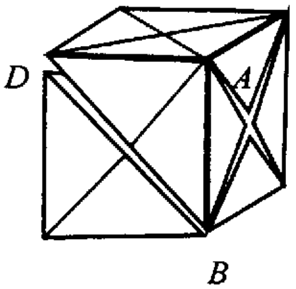
(I) 展開図に対してオイラーの公式が成り立つ（$B-P+\Gamma=2$）；

(II) 一つの頂点に貼り合わせる平面角の和は，360°を越えない．

アレクサンドロフの定理の価値は，その単純さにある《条件(I)と(II)は，展開図の多角形から，その多角形を貼り合わせて凸多面体が作れるため



（a）



（b）

の必要かつ十分な条件である》（展開図の多角形を折り曲げることが可能であるとして）.

この定理の基礎に横わたる精神を発展させて，アレクサンドロフは現代幾何学における最も重要な理論の一つである，凸表面の幾何学を創り上げた.

図9ａの展開図に戻ろう．図9ｂを見ないでも，それがアレクサンドロフの条件を充たしていることを知ると，この展開図を貼り合わせて、なんらかの凸多面体を作ることが可能であることがわかる.《一つの展開図を貼り合わせて，いくつの凸多面体を作ることができるだろうか？》多面体の面は固定されていないから，コーシーの定理はこの問題に対する解答を与えない．アレクサンドロフは一面でコーシーの定理を補強し，他面で完全性についての彼の固有の定理を見事に補足する定理を証明した：《もし展開図から凸多角形が貼り合わせられるならば，それは一つだけである.》

さらに，《その展開図からは多面体だけでなく，曲面をふくむどんな凸表面を得ることも不可能である.》アレクサンドロフの定理のこの拡張は，彼の学生であった若いオロビャニシュニコフ（С. П. Оловянишников）によって1941年になされた.

多面体表面だけでない一般の表面への，コーシーの定理のもっとも完全な拡張は，長い間解決されなかった．任意の，閉じた凸表面が，薄い，曲げられる，伸びない材料でできているとしよう．それが凸であることを保ちながら，他の幾何学的な形を得ることができるだろうか？　もし，初めの表面が凸多面体であれば，それはコーシー，アレクサンドロフ，オロビャニシュニコフの一意性についての定理の場合であり，不可能である.

コーシーの定理の任意の表面への最終的な一般化は，1949年にアレクサンドロフを中心とする学派の，ソ連の幾何学者，アカデミー会員ポゴレロフ（А. В. Погорелов）によってなされた．ポゴレロフは，《任意の閉じた凸表面はそれが凸であることを維持する条件の下では変形しない》ことを証明した．一意性についてのポゴレロフの定理は，完全性についてのアレクサンドロフの定理と同様に，幾何学における傑出した成果の一つである.

幾何学は，未来の研究者を待っている．興味のある，未解決の問題が少なくない．それらの問題のいくつかは，非常に初歩的に定式化されており，われわれが前に取り扱った凸でない多面体を変形する際に，体積が保存される，という新しい仮定をすることを考えれば，その単純さが理解できるだろう．このように考えると，新しい，まだ知られていない，たわむ多面体の例を作る試みを始めるのも有益であろう．まだ未解決な問題の中に，この仮定を否定するような多面体を見つけることを，含めることもできる.

ここで説明した全ての結果は，30才前の数学者によって得られたものである．数学は青年の力によって進歩する．新しいアイデアは若い幾何学者の頭の中に生まれ，年寄りは助産婦の役割を果たす，と一人の有名な数学者が言っている.

（訳　こじま　ひでお）