Basic 数学 '95, No. 7

«Квант» для младших школьников

ソ連科学誌・クウァントから

# やさしい物理学 ㉚

小島　英夫（静岡大学）訳



## 対称性, 異方性, そしてオームの法則　S. N. ルイコフ, D. A. パルシン (1989, No. 10, pp. 13-19)

誰でも対称性について直観的な概念を持っているものだ――対象的に配置した花の花弁, 装飾の模様, 結晶格子など. 対称性には美の概念が関わっている. そして美術や建築だけでなく, 数学や物理学にさえ対称性は関係している. しかも物理学においては, 対称性は極めて重要な役割を果たしている：対称性の概念を使うだけで, 困難な物理学の問題を解くことさえ可能な場合がある. 固体物理学の簡単な例をつかって, このことを説明しよう.

次の問題を考えてみよう：われわれの前に在る物質の電気伝導度[1]を決定するにはどうしたらよいか（その物質の性質は分かっていない）. その物質から四角な試料を切り取り, 図1に示すような回路に組込む. 加えた電圧$U$と試料を流れる電流$I$を測り, オームの法則を使って比伝導度$\sigma$を求める：

$$\sigma=\frac{IL}{US}. \qquad (1)$$

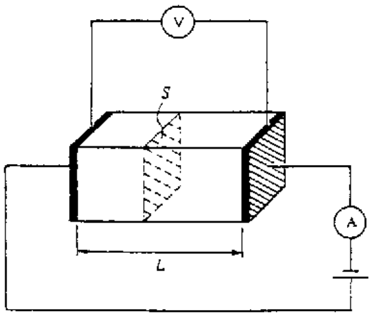


図1

[1] 電気伝導度は導体の電気抵抗$R$の逆数である. 比電気伝導度すなわち比伝導度は比抵抗の逆数である：$\sigma=1/\rho$.

[2] $\overrightarrow{j}=en\overrightarrow{v}$が成り立つことは容易に分かる. ここで$n$は速度$\overrightarrow{v}$で運動している単位体積中の電子数である. 電子の電荷$e$の符号は負であるから, ベクトル$\overrightarrow{j}$と$\overrightarrow{v}$は逆向きである.

この量$\sigma$は試料の寸法には依存せず, その物質の電流を流す性質を特徴付けているように見える. しかし, なぜ〝ように見える〟のだろうか? はたして結晶はいくつかの伝導度を持っているのだろうか?　実は, そうなのである. そしてそれは特別なことではない. 例えば, 層状な構造を持つ物質を考えてみよう：伝導性の層と誘電体層が交互に並んでいるとする. すると測定結果は, 試料の切出しかたに依存する――層に平行にか, 垂直にか. 明らかに, 平行には流れるが層に

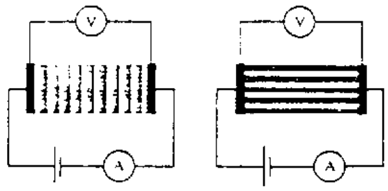


図2

垂直には電流は流れない. したがって, 図2に示した二つの方向での測定は次の結果を与える：〈横〉伝導度$\sigma_{\perp}$は零であり（図2a）, 〈縦〉伝導度$\sigma_{\parallel}$は零でない（図2b）.（この種の層状物質の例はグラファイトの結晶である. その縦伝導度は横伝導度の250倍である.）

層状構造が無い場合でも, 媒質の伝導度はその中の電流の方向に依存することがある. 非常に多くの結晶がそのような性質を持っている. それは何故だろうか.

図3に結晶中の原子の配列の例を示した（もちろん, 実際の結晶は3次元的であるが, 事の本質は平面結晶でも変らない）. 太い実線と細い実線で示した二つの方向を比較しよう：それらが同等でないことが分かるだろう. なぜか?　太い実線に沿っては, 細い実線に沿ってより原子が稀に

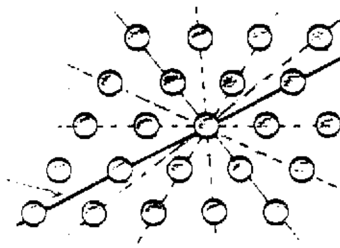

図 3

しか存在しない．任意の方向をとって調べてみると，それが前の二つとは同等でない事が分かるだろう．実際に電子もその非同等性を〈感じる〉ことが，── 一つの方向には電子が原子間を容易に動き，他の方向には容易に動けないことが，起こり得る．つまり，結晶の伝導度は電流の向きに依存する可能性があることになる．方向によって性質の違う媒質は，異方的であるという．結晶の異方性の原因は，既に分かっているように，原子の規則的配列から生ずる，方向の非同等性である．

異方性によって生ずる，もう一つの重要な現象は，結晶中の電流が電場と同じ方向に流れないことである．話はこうである．式(1)から分かるように，電流密度 $j=I/S$ は試料に掛けられた電場の強さ $E=U/L$ に比例する：

$$j=\sigma E. \tag{2}$$

ところで，媒質中の電流と電場はその大きさだけではなく，向きによっても指定されねばならない．電場ベクトル $\vec{E}$ は電荷 $e$ に働く力 $\vec{F}=e\vec{E}$ の大きさと向きを決定する．この力が働くと電子は決まった速度 $\vec{v}_i$ で媒質中を運動する．電流密度ベクトル $\vec{j}$ は，単に電流ベクトルと呼ばれることもあるが，方向性を持った電子の平均速度 $\vec{v}$ に平行である[2]．式(2)の形に書かれたオームの法則は，電流の大きさ $j$ と外から加えられた電場を関係付けているが，二つのベクトル $\vec{j}$ と $\vec{E}$ の相互の向きについては何も表していない．

〈それは明らかだ──あなた言うかもしれない──電場 $\vec{E}$ は力 $\vec{F}$ に平行だ．電子の平均速度 $\vec{v}$ はそれに働く力 $\vec{F}$ に平行だ．さらに電流 $\vec{j}$ は $\vec{v}$ に平行だ．したがって，ベクトル $\vec{j}$ とベクトル $\vec{E}$ も平行で，式(2)と同様に次の式が成り立つ：

$$\vec{j}=\sigma\vec{E}. \tag{3}$$

すべては極めて単純である！〉

この様な議論は正しいのだろうか？　すべての方向が同等な，等方的媒質では正しい．すべての方向が同等なときには，電子がどの方向に運動しても差はなく，外部電場を加えたとき，間違いなく電場 $\vec{E}$ の方向が電子の運動方向を決定する．そして，その方向に電流も流れる．

しかし，話が結晶の場合になると異方性を無視する訳にはいかない！　どの様な結晶を考えても，同等でない方向はいくらでも取り得る（図 3 を思い出そう）．この面内で，ベクトル $\vec{E}$ の方向は電子の運動方向の一つの特例にすぎない．したがって等方的な場合と同様な議論はできない．上の議論の問題点は，ベクトル $\vec{v}$ と $\vec{F}$ が平行だと仮定したことである．異方性媒質ではそれらは平行でなくなることがあり，そのときベクトル $\vec{j}$ と $\vec{E}$ も平行ではなくなる！　どうしてそう成るのかを，簡単に見てみよう．

外部からの力 $\vec{F}=e\vec{E}$ は電子を原子の〈配列を通して〉動かすが，その中には運動に〈容易な〉方向と〈困難な〉方向とがある．原子との衝突で電子はしばしば運動方向を変え，電子の運動が直線的だと言えるのは平均したときのことである．多数の原子との衝突の結果として，電子は〈困難な〉方向よりは〈容易な〉方向へより多く移動するが，その方向は必ずしも $\vec{F}$ に平行ではない．すべては，電子と原子の相互作用の詳細と結晶軸方向にたいする電場 $\vec{E}$ の向きに関係している．

注意深い読者は，厄介な問題を質問しようと，すでに待ち構えているに違いない：われわれの実験（図 1）では，電場は常に試料に平行にかけられており，電流も間違いなく試料と平行にだけ流れ得る．一体どこにベクトル $\vec{j}$ と $\vec{E}$ が非平行になる可能性があるのか？

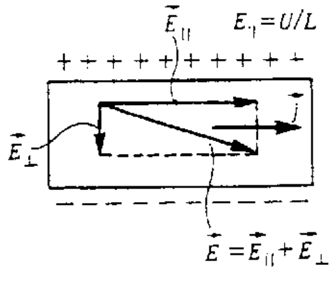


図 4

本当の事を言うと，そのような誤解を取り除く鍵が，あなた方には隠されていたのである．厚い結晶中に電流 $\vec{j}$ を引き起こす電場 $\vec{E}$ は，（正にその異方性のために）強さが $U/L$ の外部電場とは，大きさも，向きも必ずしも一致しないことを

注意しなかった．異方性媒質の場合に起こり得る状況は，図 4 に示されている．ここには，試料に電場をかけた瞬間から起こる現象の全体が描かれている．その瞬間に電子には試料にかけられた電場——図 4 のベクトル $\vec{E}_{\parallel}$が働き始める．すでに述べたように，それによって生ずる電流は媒質の異方性のために方向が変り，この例では，右に，そして少し上に向かう（そのとき電子は左へ，そして少し下へ動く）．電子の横へのずれによって，試料の両端が帯電することになり（上端は正に，下端は負に），試料には外部電場に垂直な電場 $\vec{E}_{\perp}$ が生ずる．この電場は電子の下方への横運動を妨げるように働くが，電子の運動が止るまで増加する．これらの現象は瞬く間に起こり（$10^{-13}$s 位の間に），それ以上は変化しない：電流 $\vec{j}$ は試料に沿って流れ続けるが，最終的な電場は $\vec{E}=\vec{E}_{\parallel}+\vec{E}_{\perp}$ であって，電流と平行ではない．付け加えると，電場ベクトル $\vec{E}$ の追加成分 $\vec{E}_{\parallel}$ によって，試料の上端と下端の間には電位差が生じることが容易に分かる．これは実際に測定できる．

このようにして，先ず第一に，異方性伝導体にたいするオームの法則を考えると，結晶の伝導度は一般に方向によって異なり，とくに電流 $\vec{j}$ は電場 $\vec{E}$ と角度をつくって流れることが分かる．

〈我々は——読者の中にはこう考える人も居るだろう——とんでもない厄介な問題に取り掛かってしまったらしい！　まさか，考え得るすべての方向にたいして，無限に多くの測定をしなければならないのだろうか？〉．

そうではない．事情はもっと単純である．オームの法則に明確な数学的形式を与える方法を，これから考えることにする．とくに高い対称性を持った結晶では，結果は極めて簡単になることが分かる．それでは，そのような場合を考えることにしよう．

図 3 には，すべての方向が同等でない結晶構造の例を，2 次元の場合に示した．今度は，3 次元のいくつかの例を考えよう．〈旅行者〉が結晶中を歩き回り，整然と並んだ原子配列の景観を観賞するときに見る景色を描くことは，上手な画家でないと難しい．したがって，図 5 〜 7 には 3 種の結晶構造のほんの一部を示した．

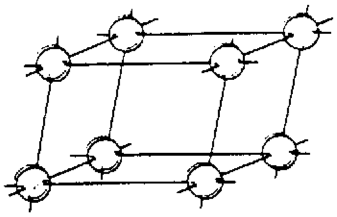

図 5

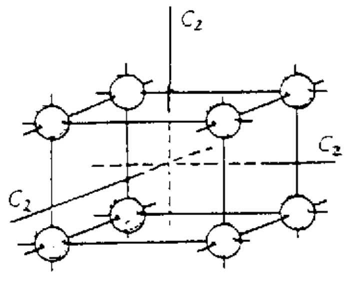


図 6

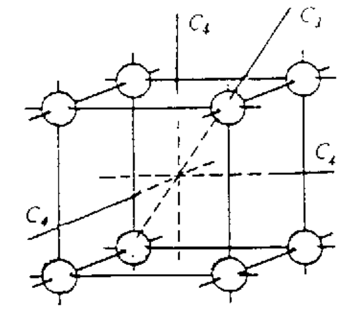


図 7

図 5 では，ありふれた斜角平行 6 面体の頂点に原子が配列している．この結晶は（図 3 の 2 次元の相似図形と同様に）同等な方向を持たない．しかし，以下の例は興味深い．図 6 では，原子が直角平行 6 面体の頂点に配列しており，記号 $C_2$ で表した直線は各面の中心を垂直に貫いている．図 7 では，平行 6 面体は立方体に代り，記号 $C_4$ で表した同様な直線のほかに，立方体の中心を貫く対角線 $C_3$ がある．

直線 $C_2, C_3, C_4$ は，図 6 と 7 に示した結晶構造の対称軸である．対称軸というのは，その軸の周りに結晶全体を回転させたとき，回転の前と全く同じ原子配列が得られる軸のことである．回転角は一定の大きさでなければならない：軸 $C_2$ にたいしては 180°，軸 $C_3$ にたいしては 120°，軸 $C_4$ にたいしては 90°，すなわち $C_n$ にたいしては $2\pi/n$；これらの角の倍数もまた，示された回転の繰り返しであり，条件を満たしている．ついでに言えば，$C_n$ は対称軸を表す一般的な記号であり，数 $n$ は回転軸の〈次数〉と呼ばれる．

対称性の観点を取入れると，方向の同等性という考え方をより正確にすることができる：対称軸の周りの回転によって〈互いに移り変わる〉任意の方向は同等である．

結晶が，より次数の高い軸を持てば持つほど，同等な方向は多く，より強く異方性を制限する．その制限が伝導度に与える影響を調べる前に，図6と7に示した結晶構造において，同等な方向と同等でない方向の例を見てみよう．特に，図7の立方結晶における3本の軸 $C_4$ 自身は互いに同等な方向にある（$C_3$ 軸の周りの回転によって相互に入れ替わる）のにたいして，それに対応する図6の3本の軸 $C_2$ が同等でないことは，注目すべきことである．

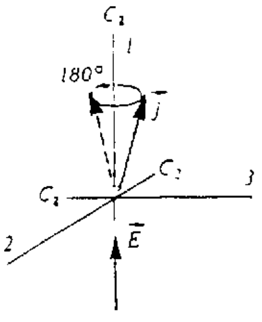


図8

それでは，実際に伝導度の問題に対称性の考察を適用するには，どうしたらよいのだろうか？例を使って説明しよう．結晶中に（同等でない）互いに直交した3本の対称軸 $C_2$ がある場合から始めよう（図6参照）．今それらの軸に1，2，3と番号を付けることにする（図8）．2次の対称軸，例えば軸1に平行に電場 $\vec{E}$ が加えられたとき，電流 $\vec{j}$ はどの方向に流れるだろうか？ 答えは極めて簡単に得られる——電流は電場に平行な対称軸に沿って流れる！〈帰謬法〉でこのことを証明しよう．

電流 $\vec{j}$ が対称軸1に対してある角度をつくって流れると仮定する．結晶をこの軸の周りに，加えた電場 $\vec{E}$ もろとも180°回転する．明らかにこのとき，結晶内の原子配列もそこを流れる電流も一緒に回転する．電流 $\vec{j}$ は，仮定によって回転軸に平行ではないから，図8に点線で示した新しい位置に移り，始めとは異なる配置をとる．他方で，この回転の後での電流 $\vec{j}$ を決定する微視的な状況は変っていない：原子の新しい配置は始めと変らず，電場 $\vec{E}$ は1の方向にある．つまり電流 $\vec{j}$ も始めと同じ方向になければならない．

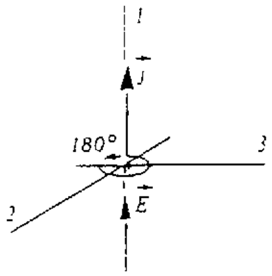


図9

このようにして，矛盾が生ずることが分かる．それを逃れる唯一の道は——この場合ベクトル $\vec{j}$ がベクトル $\vec{E}$ と同様に，軸1に平行であると認めることである（図9）．

この結論は，結晶の微視的構造の詳細——原子がどの様に配列しているか，電子はどの向きにもっとも動きやすいか——にはよらないことに注目しよう．他の対称軸が存在することも使わなかった．電場 $\vec{E}$ の方向にある対称軸の次数も重要ではない——証明は対称性に応じたすべての回転角（360°の倍数以外の）に対して成り立つ．それゆえ，結晶が対称軸を持ち，電場 $\vec{E}$ がその方向に加えられたとき，電流 $\vec{j}$ は電場に沿って流れる．このような条件が成り立つときには，$\vec{j}$ と $\vec{E}$ の関係は等式(3)で与えられ，比例係数 $\sigma$ はその対称軸の方向の伝導度である．結晶の対称軸に沿って切出された試料で測定すると（図1），式(1)によって $\sigma$ を求めることができる：図4の場合と違って，この場合の電場には電流に垂直な成分はなく，$E=U/L$ であり，式(1)が式(3)から直ちに導かれる．

同様に，対称軸1，2，3に沿った配向を持つ試料を使って3回の測定をすれば，3個の伝導度が得られる；$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$．一般に方向1，2，3は同等ではないから，これらの伝導度は違っている：

$$\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3. \tag{4}$$

電場 $\vec{E}$ が結晶中の対称軸に平行でない場合

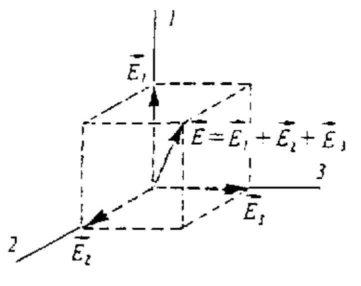


図10

には，どんな状況が生ずるだろうか？　電流 $\vec{j}$ はどの向きに流れるだろうか？　この場合を考察するために，ベクトル $\vec{E}$ の軸 1, 2, 3 方向の射影を求めよう，つまり電場を $\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3$ の形に表そう（図10）．そして各成分がどの様な電流成分を与えるかを考えよう．

電場 $\vec{E}_1$ は対称軸 1 に平行だから，同じ方向の電流を生ずる：

$$\vec{j}_1=\sigma_1\vec{E}_1.$$

同様に，電場の残りの二つの成分も対称軸 2, 3 の方向の電流を生ずる：

$$\vec{j}_2=\sigma_2\vec{E}_2,\quad \vec{j}_3=\sigma_3\vec{E}_3.$$

これらの関係は全電流 $\vec{j}=\vec{j}_1+\vec{j}_2+\vec{j}_3$ を決定する：

$$\vec{j}=\sigma_1\vec{E}_1+\sigma_2\vec{E}_2+\sigma_3\vec{E}_3. \qquad (5)$$

不等式(4)によって，方向 1,2,3 における，電流の射影と電場の射影の比（$j_1/E_1=\sigma_1$, など）は同じではない．すなわち，ベクトル $\vec{j}$ と $\vec{E}$ とは平行でない（図11）．これがわれわれにとって決して

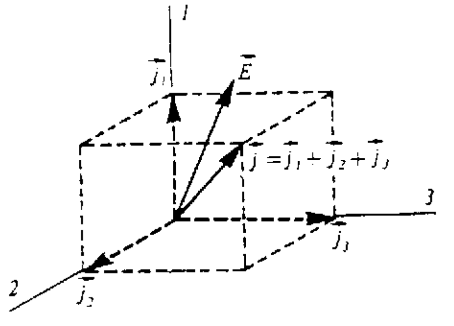


図11

新しい事実でないことは，伝導度が方向によって違うことを考えれば明らかである．

さらにここで興味のあるのは，式(5)が示す次のことである：電場 $\vec{E}$ が任意の方向にあるとき，電流 $\vec{j}$ の大きさと向きは，考えている結晶の対称軸方向の伝導度の値だけで完全に決まる．無限に多くの測定は必要でなく，$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を決めれば十分である．実際には，まず対称軸の方向を見つけなければならないが，それはまた別の話である．

次の例として，立方性の結晶を考える（図 7）．ところでこれは，前とは違う特別の場合だろうか？　そうである．おまけに，非常に興味がある．まず，立方対称性は，結晶において可能な対称性の中で最も対称度の高いものである．つぎに，多くの実用上重要な半導体結晶—— Ge, Si などがこの対称性を持ち，対称性が結晶の伝導度にたいして与える影響の，最も顕著な例である．

立方結晶には互いに直交した 3 本の対称軸 $C_4$ が存在する．それらに沿った伝導度の値は上の考察によれば $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ である．同じ論法を使うと，任意の向きのベクトル $\vec{E}$ にたいして式(5)が成り立つ．しかし，今の場合は立方結晶の 3 本の軸 $C_4$ は互いに同等である．そのことから，明らかに，次の関係が得られる：

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=\sigma. \qquad (6)$$

まさに対称性が，これらの三つの方向に沿った伝導度が等しいことを保証する．しかし，軸に沿った方向だけだろうか？　式(6)を使うと，式(5)は等方的な媒質にたいするオームの法則である，式(3)に帰着する：

$$\vec{j}=\sigma\vec{E}_1+\sigma\vec{E}_2+\sigma\vec{E}_3$$
$$=\sigma(\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3)=\sigma\vec{E}.$$

すなわち，第一に，電場 $\vec{E}$ の向きに関係なく電流 $\vec{j}$ は常に $\vec{E}$ に平行である．第二に，電流の大きさは一つの伝導度 $\sigma$ だけで決められる．立方結晶の伝導度はすべての方向で同じである！

この結果は予想外で，無条件に美しくはないだろうか？　立方結晶の中では，すべての方向が同等である訳ではない——例えば図 7 の直線 $C_4$ と $C_3$ を較べてみれば明らかである．この両者は対称軸であり，電場 $\vec{E}$ がそれらに平行にかけられたときには電流は電場に平行に流れる．だがその二つの方向の電場に対して，なぜ電流の大きさが同じに成るのだろうか？　電子は方向の不同等性を〈感じる〉のだから，それらの方向の伝導度の値に差ができる筈だと思える．ところが，そうではないのだ．どの方向に結晶を切っても，例外なく測定結果は同じ値 $\sigma$ を与える．この結論は対称性の考察だけから導かれたのである．

このようにして，立方結晶の場合には，対称性が完全に異方性を凌駕してしまうことが分かる：電気伝導に関しては，立方結晶は等方性媒質に似ていて，すべての方向は同等である．

結晶と等方性媒質の微視的構造を比較してみよう．等方性媒質の例として，完全に不規則に配列した原子で特徴付けられる非晶体を取上げる．そのような原子の分布は一般に対称性を持たず，任意の回転（360° の倍数を除いて）は種々の異なる原子配置を与える．しかしそのすべての配置は

同じように無秩序で，その意味で始めと変りが無い．無秩序性は媒質の性質をすべての方向で均等化(平均化)する．すなわち逆説的ではあるが，等方性媒質では，方向の対称性は立方結晶におけるよりも高い！　任意の方向が対称軸である．こうしてみると，等方性媒質にたいするオームの法則(3)は，単純で初歩的な真理であると思われる．

そういう訳で，方向の対称性は有用である．しかし，対称性が全く無かったらどうなるだろうか？(例えば，図5の結晶は対称軸を一本も持たない)　このとき，オームの法則は最も一般的な形で成り立つ．このことを確かめよう．

互いに直交する任意の方向に $x, y, z$ (座標軸)を選ぼう．電場 $\overline{E}$ を成分 $E_x, E_y, E_z$ に分ける．電流 $\overline{j}$ も同様に3成分 $j_x, j_y, j_z$ に分ける．

$j_x$ はどの様に作られるだろうか？　もはや座標軸は対称軸ではない！　電場の3成分によって作られる3つの電流は軸 $x, y, z$ に沿って流れる必然性はない．つまり，各電流は $x$-, $y$-, $z$-成分を持つ．ということは，電場ベクトル $\overline{E}$ の $x$-成分だけでなく，$y$-および $z$-成分も $j_x$ に相応の寄与をするのである．それらの比例係数を $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{xz}$ と書こう．

$j_y, j_z$ はどのように表されるのだろうか？　答えは $j_x$ の場合からの類推で直ちに得られる．したがって：

$$
\begin{aligned}
j_x &= \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y + \sigma_{xz}E_z \\
j_y &= \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y + \sigma_{yz}E_z \\
j_z &= \sigma_{zx}E_x + \sigma_{zy}E_y + \sigma_{zz}E_z
\end{aligned}
\tag{7}
$$

この三つの等式は全体として，任意の度合いの異方性を持つ媒質にたいするオームの法則を表している．この式は次のことを示す：電流 $\overline{j}$ の大きさは電場 $\overline{E}$ の大きさに比例するが，それらの向きは一般に同じでない．式(7)は最も一般的な形でベクトル $\overline{j}$ と $\overline{E}$ の間の線形関係を表している．今考えている座標系で，その関係は9個の〈伝導度係数〉$\sigma_{ik}$，$(i, k = x, y, z)$ で記述される．

これまでに考察したすべての例は，特別な場合として式(7)に含まれている．すなわち，軸 $x, y, z$ を対称軸1, 2, 3に平行に選ぶことができるときには，それらの例に帰着するのである．すべての係数のうち $\sigma_{xx} = \sigma_x$, $\sigma_{yy} = \sigma_y$, $\sigma_{zz} = \sigma_z$ 以外の係数が0になると(それらの大きさに関係なく)，式(7)は式(5)に帰着する．さらに軸のうちの2本，たとえば1と2，が同等であると，$\sigma_1 = \sigma_2$ となる(すでに数値が一つ減った)．最後に，3本の軸がすべて同等であると――立方対称性――，式(3)に帰着する(一つの数値が結晶の伝導度に関するすべての情報を与える！)．対称性を知ることは，こんなに役立つ．

伝導度とそれに対称性が与える影響についての話は，これで終りにしよう．もちろん，〈対称性の概念〉を使って解ける問題のリストは，これで終りになる訳ではない．対称性が決定的な役割を果たす物理現象は他にも沢山ある．それらについては――別の機会に話そう．

(訳　こじま　ひでお)