

小島 英夫 (静岡大学) 訳

Japanese translation rights arranged with VAAP through Japan Soviet Copyright Center, Tokyo.

オームの法則の限界 S.S.ムルジン, M.P.ツルウニン, D.B.ショブクン (1989, No. 4, pp. 2-8)

〈注意!〉——ロシア人コズマ・ブルトコフは、話題が法則のことになるとよくそう言ったものだ。とくに、物理法則については、例えば、オームの法則を思い出してみよう：電流は電圧に比例する。実は、この法則がいつでも成り立つとは限らないのだ。それでよいのだ！もし、オームの法則がいつでも成り立っているとすると、多くの電子機器や電波機器は存在しないことになる。幸いなことに、大多数の他の物理法則と同様に、オームの法則には適用限界がある。まさにこの法則の適用限界の外で、それらの機器の動作を保証する、興味ある物理現象が起こるのだ。それらの現象自体も非常に面白いのだが、ここでは別の問題を考えよう：オームの法則はなぜ破れるのだろうか？

オームの法則

導体を電気回路に組み込み、そこを流れる電流の大きさを回路に加える電圧 U の関数として測定しよう。すると、電流 I の電圧依存性、すなわちその導体の電圧-電流特性が得られる。オームの法則によれば、電流の大きさは加えた電圧に比例する。したがって、電圧-電流特性は1次(線形)関数で表される：

$$I(U) = U/R.$$

ここで抵抗 R は電圧 U に依存しない。もしそうでなければ(つまりオームの法則が成り立たないと)、電圧-電流特性は非線形になる。

オームの法則が破れる導体の最も身近な例は、白熱電球のらせん状フィラメントである。消費電力 40W の電球では、電圧-電流特性は図1のようになる。線形な部分は $U < 5V$ だけで、それより

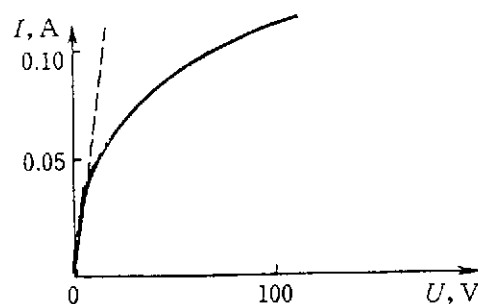


図1

電圧が高いところでは電流 I は線形な依存性 $I(U)$ の場合より緩やかに増加する。何故そうなるのかを推測することは容易である。電圧を上げるとフィラメントは加熱され、その抵抗は増加するからである。これは、次の一般法則の一例である：オームの法則は十分に小さな I と U に対してだけ成り立ち、大きな電流と電圧に対しては成り立たない。

オームの法則を別の形に書こう。そのために、電流密度 $j = I/S$ を導入する。 S は導体の断面積である。すると、

$$\begin{aligned} j &= \frac{I}{S} = \frac{U}{RS} = \frac{U}{(\rho L/S)S} \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{U}{L} = \sigma E. \end{aligned}$$

ここで ρ は導体の比抵抗、 $\sigma = 1/\rho$ は比伝導度と呼ばれる量であり、 L は導体の長さ、 $E = U/L$ は電場強度である。つまり、オームの法則によれば、電流密度 j は電場強度 E に比例する。もし伝導度 σ がなんらかの原因で電場の大きさに依存すると、 j の E に対する依存性は非線形になり、オームの法則は破れる。

オームの法則の破れる原因を知るために、電場

のない場合とある場合とにおける導体中の電子の運動を考察しよう。

導体の中での電子の運動

電流を通す多くの物質は結晶である。その結晶を形作る原子は、勝手な場所に在るのではなく、空間内で規則的に反復する構造-結晶格子を作っている。

導体の中では、原子の一部はイオン化しており、そこから分離した電子は導体内を動き回ることができる。そのような電子(それを伝導電子と言う)の密度 n は導体の種類によって異なる。金属では、伝導電子の密度は温度に依存しない。銅の場合には $n=8.4 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ である。半導体では n は温度に依存する。ゲルマニウムでは $T=300\text{K}$ のとき $n=2.4 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$ である。

伝導電子は始終原子に衝突しながら、非常に苦労して結晶にくもぐりこむと思われるかもしれない。ところが全く違う。量子論による結論はこうである：原子が正確に周期的に配列しているために、電子は理想的な格子の間を真っ直ぐに進むことができる。これらの伝導電子は真空中の自由電子のように振る舞う。真空中の電子の場合と同様に、結晶中の電子の運動はニュートンの第二法則 $\vec{F}=m^*\vec{a}$ を使って表すことができる。ただし、この式の中の m^* は有効質量と呼ばれ、自由電子の質量 m_e とは異なる。この差が伝導電子と結晶格子の相互作用を反映している。種々の導体で格子構造が違えば、その中の電子の有効質量も異なる。そして m^* は m_e より大きくも、小さくも成り得る。

実在の導体は理想的な結晶ではありえない。そこには常に原子の周期的配列からの乱れが存在する。例えば、格子の一部には他の物質の原子——不純物原子——が不規則に入り込んでいる。そのような不純物原子にぶつかった電子は散乱される、すなわちその運動方向を変える。格子の中の原子の熱運動は原子を平衡位置からずらし、周期性を乱すので、これも電子の散乱を引き起こす。電子が二つの衝突の間に直線運動をする時間の平均値を自由走行時間と呼び、 τ で表す。電子の速さが大きくなると時間 τ は減少する。

電場がないとき、伝導電子は種々の方向に無秩序に動き回る熱運動をしている。半導体中では、

電子の運動は理想気体分子の熱運動に似ている。その運動の平均の速さ v_0 は条件 $m^*v_0^2/2=kT_e$ で決められる。ここで、 k はボルツマン定数、 T_e は電子の温度である。 $T_e=300\text{K}$ のとき、ひ化ガリウム (GaAs) 中で $v_0=4.5 \times 10^5 \text{ m/s}$ である。

金属中では電子密度が半導体中より著しく大きく、気体の分子力学理論は使えない。量子論からの結論によれば、金属中の電子の無秩序な運動の平均速度は $v_0=10^6 \text{ m/s}$ で、殆ど温度に依存しない。

ここで電場 \vec{E} の存在が、電子の運動にどのような効果を与えるかを考えよう。電子には力 $-e\vec{E}$ が働き、加速度 $\vec{a}=-e\vec{E}/m^*$ を電子に与える。 i 番目の電子の、衝突直後の速度を \vec{v}_i と書くことにする。 i 電子の任意の時刻における速度は $\vec{v}_i - e\vec{E}t_i/m^*$ で与えられる。ここで t_i は最後の衝突からの時間である。 N 個の電子の平均速度は次のようになる：

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\vec{v}_i - \frac{e\vec{E}}{m^*} t_i \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \vec{v}_i - \frac{e\vec{E}}{m^*} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i \right). \end{aligned}$$

量 $(1/N) \sum \vec{v}_i$ は散乱直後の電子の速度の平均である。散乱直後の速度は任意の方向に無秩序に分布しているから、その平均は零である： $(1/N) \sum \vec{v}_i = 0$ 。量 $(1/N) \sum t_i \equiv \tau$ は、既にわれわれが知っている自由走行時間の平均という意味を持っている。したがって、電場を加えたとき全ての電子は余分の速度(ドリフト速度という)を持ち、その平均値は $u = eE\tau/m^*$ であり、その向きは電場 \vec{E} と平行である。

そう言うわけで、電場があると電子の無秩序な運動にドリフト運動が加わり、電子の方向性を持った運動、すなわち電流が生ずる。導体中の電子密度が n であると、電流密度 j は次式で与えられる：

$$j = enu = \frac{ne^2\tau}{m^*} E.$$

他方で、 $j = \sigma E$ であるから、

$$\sigma = \frac{ne^2\tau}{m^*}.$$

これはドルーデの公式と呼ばれる。オームの法則が成り立つのは、ドルーデの公式に現れる量が電

場 E に依存しない場合である。もし、電子密度 n または有効質量 m^* が電場の作用下で変化すると、オームの法則は破れる。

オームの法則の成り立つ条件

まず、どのような条件のときに自由走行時間 τ が電場 E に依存しないかを考察しよう。

時間 τ は個々の電子の速さに依存する： $\tau = \tau(v)$ 。電場を加えたときに生ずるドリフト速度 $u = eE\tau/m^*$ は電場が増すと大きくなる。電場が小さいときにはドリフト速度 u は電子の無秩序な運動の速さ v_0 よりも著しく小さいから、 τ は v_0 に依存するが u には依存しないと考えることができ、したがって τ は電場 E には依存しない。 E が大きくなり u が v_0 の程度になると、ドリフト速度を考慮する必要が出てくる。すると電子の速度、したがって自由走行時間 τ の電場依存性が生ずる。

したがって、オームの法則が成り立つためには、次の条件が必要である：

$$u \ll v_0. \quad (1)$$

すなわち、導体中の電場は $E_0 \equiv m^*v_0/e\tau$ より著しく小さくなければならない。

半導体では、前に見たように $v_0 \sim 10^5$ m/s である。 u の値を v_0 に近づけるためには $E \sim 10^6$ V/m の電場を加えなければならない。これは雷の稲妻を起す電場に相当する巨大な電場である。それにも拘らず、半導体中にそのような電場を作することは可能である。

速度 u にたいするもう一つの、より厳しい制限が存在する。 u はその導体中の音速 v_s より小さくなくてはならない ($v_s \sim 10^3$ m/s)：

$$u < v_s \quad (2)$$

速度 u が音速 v_s に達すると同時に、結晶中には音響振動が励起される。すると自由走行時間 τ とその τ に比例する伝導度 σ とは減少する。この状況は飛行機が音響障壁を超えたときに流体力学的抵抗が急激に増加するのと似ている。

それゆえ、電場 E が $E_s \equiv m^*v_s/e\tau$ を越すと電気伝導度 σ は電場に依存し始め、オームの法則は破れる。

電場の作用はドリフト運動に現れるだけではない。導体中を電流が流れるとジュール熱が生ずることはよく知られており、導体は加熱される。

この過程を詳しく調べてみよう。

任意の導体は2種類の部分系からなると考えることができる：物質の原子(イオン)のつくる結晶格子とその格子を埋める伝導電子の気体とである。電子と格子はそれぞれの温度、電子温度 T_e と格子温度 T_l で特徴付けられる。電場がないときには、電子気体は格子および周囲の環境と熱平衡にある： $T_e = T_l = T_m$ (T_m は環境の温度)。電場が加わると伝導電子が先ず加熱される。次に熱が電子から格子に伝わり、それから環境に伝わる。したがって、電場中では熱平衡は破れ、温度の間には不等式が成り立つ： $T_e > T_l > T_m$ 。

もし、導体から環境媒質への熱輸送が電子から格子への熱輸送より悪いと、すなわち $T_e - T_l \ll T_l - T_m$ が成り立つと、格子は電子と共に全体として加熱される(これは白熱電球のフィラメントの場合に当てはまる状況である)。逆の場合も可能で、そのとき電子温度は格子温度より著しく高くなる： $T_e - T_l \gg T_l - T_m$ 。

金属中では、既に見たように、電子の無秩序な熱運動の平均速度は、事実上温度に依存しない。ところが半導体では、電場を加えたときの T_e は電子の熱運動速度 v_0 の増加と共に高まり、自由走行時間が減少する。速さ v_0 の変化 Δv_0 が小さいとき、すなわち $v_0 \gg \Delta v_0$ が成り立つとき、 v_0 の E に対する依存性、したがって τ の E に対する依存性は無視できる。条件 $v_0 \gg \Delta v_0$ は、電子温度の平衡状態からのずれ ΔT_e が小さいことと同じである：

$$\Delta T_e \ll T_e. \quad (3)$$

このようにして、オームの法則が成り立つためには、自由走行時間 τ が電場に依存しないことが必要であり、そのためには次の条件が成り立つことが要請される：

$$u \ll v_0, \quad (1)$$

$$u < v_s, \quad (2)$$

$$\Delta T_e \ll T_e = T_m. \quad (3)$$

これらの不等式のどれかが破れると、オームの法則からのずれが生ずる。次節以下に見るように、条件 $u \ll v_0$ と $\Delta T_e \ll T_e$ が破れると、電場 E はドルーデの公式に現れる他の量——有効質量 m^* や電子密度 n に変化を与える可能性がある。 m^* と n の E に対する依存性は、半導体の電圧-電流特性に著しい変化を生ずる。

強い電場中の半導体

電流 I の流れている導体では、電力

$$P = I^2 R = \sigma E^2 L S$$

が消費される ($I = jS = \sigma ES$, $R = \rho L/S = L/\sigma S$ を用いた)。単位体積当たりの消費エネルギーは $Q = \sigma E^2$ である。同じ消費エネルギー Q に対する電場強度 $E = \sqrt{Q/\sigma}$ の値は、半導体では金属の場合より著しく大きい。それは半導体中の電子密度、したがって電気伝導度 σ が著しく小さいからである。それゆえ、半導体では条件 $u < v_s$, $u \ll v_0$ が容易に破れる。さらに、半導体中の個々の電子には金属中よりも大きな電場がはたらく。電子気体はより強く加熱され、条件 $\Delta T_e \ll T_e$ も容易に破れる。

条件(1),(2)および(3)のいずれかが電場の増加によって破れると、半導体の種類によって異なる、オームの法則からの著しいずれが生ずる。例えば硫化カドミウム CdS では、始めに条件 $u < v_s$ が破れる。そのときの電場は $E_s = 1.4 \times 10^5$ V/m で、電圧-電流特性 $j(E)$ には屈曲が現れる (図2)。 $E > E_s$ になるとこの半導体は強い音波を放射するので、音波振動の発振素子として使える。

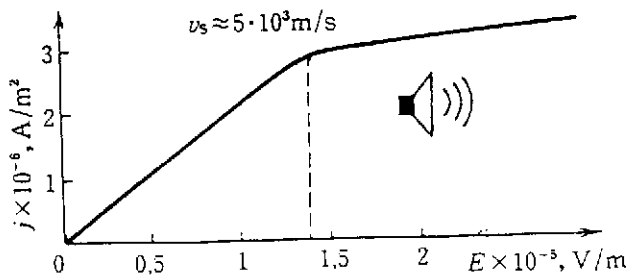


図2

他の半導体 Ge, Si, GaAs, InP, CdTe などでは、音波の励起は極めて弱く、電場 E_s での特性曲線の屈曲は認められない。これらの半導体では、オームの法則からのずれは条件 $\Delta T_e \ll T_e$ の破れに関係している。このとき自由走行時間は電場 E に反比例する: $\tau(E) \sim 1/E$ 。したがって、電流密度の電場依存性は有効質量 m^* と電子密度 n の変化によって生ずる。Ge と Si では m^* , n は電場に依存せず、 $E > 10^6$ V/m のときに電圧-電流特性に電流密度の飽和が生ずる (図3)。GaAs, InP, CdTe では、 E の増加に伴う電子エネルギーの増加が自由走行時間 τ の減少だけで

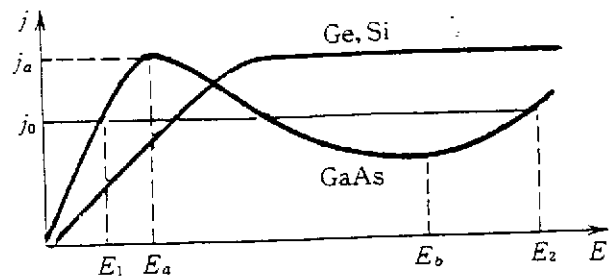


図3

なく、有効質量 m^* の増加をももたらす。 m^* の増加は電子と結晶格子の相互作用の変化によって生ずる。その結果、これらの半導体では、 E の増加につれて、ある電場の値 E_a から電流密度 j が減少し始める (図3の領域 $E_a < E < E_b$)。GaAs では j の減少は $E_a = 3.2 \times 10^5$ V/m で始まり、 $E_b \approx 10E_a$ まで続く。電場 E_a における電子のドリフト速度は $u = j/en = 1.5 \times 10^5$ m/s である。

さらに電場が強くなり $E \sim 10^7$ V/m になると、条件 $\Delta T_e \ll T_e$ の破れに加えて条件 $u \ll v_0$ の破れが生ずる。そのような電場中では電子は自由走行時間内に原子をイオン化するのに十分なエネルギーを得る。高速の電子は原子と衝突して余分な電子を作り出し、それらが更に電場で加速され、新しい電荷担体を生み出す。この過程は衝突イオン化と呼ばれる。全電子密度 n は増加し、したがって電気伝導度も増大する。更に電場が大きくなると ($E > 10^7$ V/m) 電子密度と伝導度は雪崩的に増大し、半導体の電氣的破壊が起こる。

この様にして、非常に強い電場 E 中の半導体では、電流密度 $j = \sigma E$ は線形則から急激にずれる。とくに、Ge と Si では電流密度の非線形的増加の代わりに飽和が生じ、また GaAs, InP, CdTe では電圧-電流特性にN型の領域が現れる (図3); $0 < E < E_a$ の領域ではオームの法則が成り立つが、 $E_a < E < E_b$ の区間では、強電場による τ の減少と m^* の増加により電流密度は減少する。最後に、 $E > E_b$ の領域では n の増加による j の急激な増大が生ずる。

ガン効果

電圧-電流特性に減少部分が存在すると、アメリカの技術者ジョン・ガンが発見した面白い現象が生ずる。

長さ L の GaAs の試料に、特性曲線の減少部

分に相当する電場が加わるような電位差 U_0 を加える。試料中の電場ははじめ一様で U_0/L であるとする。なんらかの原因で試料の薄層 AB 部分における電場 E が他の部分より僅かに大きくなったとしよう (図 4)。

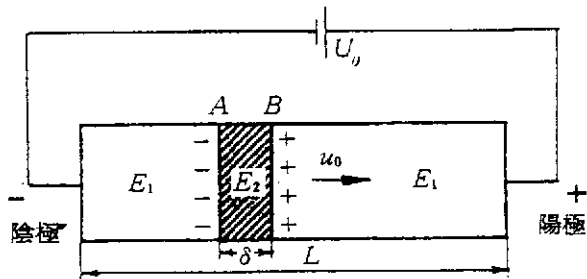


図 4

すると薄層 AB 内の電子のドリフト速度 $u = j/en$ は外側より小さくなる。したがって、境界 A には去るよりも多数の電子が入ってくるし、境界 B には逆に少数の電子が入ってくる。A の近傍では負電荷の過剰が生じ、B の近傍では正電荷の過剰が生ずる。したがって、薄層 AB には始めの電荷と同じ向きに余分な電場が出来る。電場が増すと薄層内の電子のドリフト速度は更に減少し、そこでの電場は更に大きくなる。

こういう訳で、電圧-電流特性 $j(E)$ の減少部分に相当する電場強度では、電場の様な分布は実現しない：無秩序に生ずる、どんなに小さな E の不均一さ (ゆらぎ) も、消失せずに増幅される。その結果、電氣的ドメインと呼ばれる強電場の狭い領域 (厚さ δ) が形成される。すると、試料に加えられた電圧 U_0 は次の関係を満たす：

$$E_2\delta + E_1(L - \delta) = U_0 = \text{const.}$$

ここで、 E_2 はドメインの中の、 E_1 は外の電場強度、 const は定数を表す。 E_2 が増すと E_1 は減少する。 $E_1 < E_a$ 、 $E_2 > E_b$ となる瞬間がやってくる (図 3 を見よ)。ドメインの外の電子のドリフト速度は減少し始めるが、中では増加する。そして内と外のドリフト速度が等しくなったとき、ドメイン内の電場 E_2 の増加は止んで、ドメイン内の電流密度は試料内のものと等しくなる：

$$j(E_1) = j(E_2) = j_0.$$

最後の二つの等式から、試料内に実現される電流密度はドメインの厚さ δ に依存することが分かる。

通常、ドメインは陰極の近くに出来 (そこでの接続の為の溶接が不均一性を高める)、電子の流

れによって、速さ $u_0 = j_0/en$ で陽極に向かって運ばれる。それが試料に沿って動いて行くとき、その厚さは変化せず、したがって電流密度 j_0 も変わらない。陽極の近くで、ドメインは消え始め、その厚さは減少し、試料中の電流は増加し始める。同時にドメインの外の電場 E_1 は増加する。 E_1 が臨界値 E_a に達すると、陰極で新しいドメインが生まれ、電流は減少し始める。この過程は周期的に反復する (図 5)。試料中を流れる電流の振動の周期は $T_0 = L/u_0$ である。

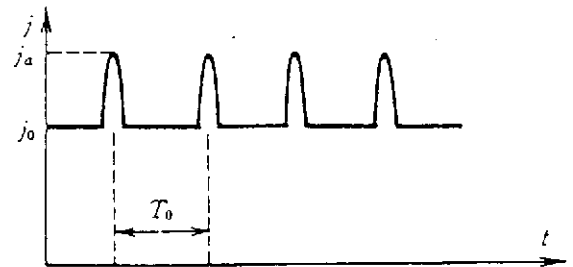


図 5

そういう訳で、半導体に静電場 U_0 を加えることによって、振動数 $f = 1/T_0 = u_0/L$ の交流を得ることが可能となる。これはオームの法則とはまるで違うものである。ひ化ガリウム GaAs では $u_0 \approx 10^5 \text{ m/s}$ である。長さ $1 \sim 100 \mu\text{m}$ の小さな試料を使うと、振動数 $f = 10^9 \sim 10^{11} \text{ Hz}$ の交流が得られる。ガン効果を基礎にして、多くの最新式超高周波 (UHF) 発信機が実用化されている。それらの装置は、例えば、交通警察による自動車の速度のチェックや人工衛星によるテレビ放送で利用されている。

大電流の際のオームの法則の破れ

今までに考察したのは、電場の中での電子の運動であった。しかし、電流が導体を流れると磁場の原因となることはよく知られている。磁場は導体の外に出来るだけでなく、中にも出来る。例えば、直径 $d = 1 \text{ mm}$ の直線導体に電流 $I \approx 10 \text{ A}$ が流れると、その表面近くには磁気誘導 $B = 4\mu_0 I/d \approx 0.012 \text{ T}$ の磁場ができる ($\mu_0 = 4 \times 10^{-7} \text{ V} \cdot \text{s/A} \cdot \text{m}$ は磁気定数 (真空の帯磁率) である)。電流の作る磁場もオームの法則の破れる原因になる。

磁場中を運動する電子にはローレンツ力が働き、電子の軌道を曲げる。磁気誘導 \vec{B} が電子の速度 \vec{v} に垂直であると、電子の軌道は半径 $r =$

m^*v/eB の円になる。ベクトル \vec{B} と \vec{v} のなす角が α であると、電子はらせんに沿って運動し、その直径は $d=2(m^*v/eB)\sin\alpha$ であり、電子がらせんの一段を進む時間は $T=2\pi m^*/eB$ である。

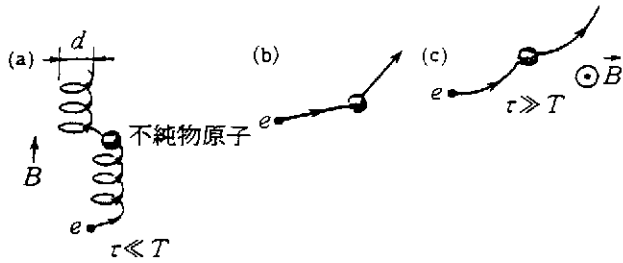


図6

導体中で電子がらせんに沿って運動するためには、自由走行時間 τ にたいする条件 $\tau \gg T$ が成り立たねばならない(図6(a))。このとき、らせんの直径は $d < vT$ を満たし、電子が磁場のないうちに時間 τ の間に運動する距離 $l = v\tau$ より著しく小さい(図6(b))。したがって、時間 τ の間に電子は直径 d のチューブを描くことができる。その結果、磁場中の導体の電気抵抗は $B=0$ の場合より大きくなる。このように電気抵抗 R が〈自己電流〉の磁場に依存すると、オームの法則の破れが生ずる。

もし $\tau \ll T$ が成り立つと、電子が継起する二つの衝突の間に運動する軌道は殆ど直線と変わらない(図6(c))；磁場は導体の電気抵抗を殆ど変えない。

磁場の影響が重要になり始める磁気誘導の大きさ B_0 は、電子が円形軌道を回る周期 $T = 2\pi m^*/eB$ が自由走行時間 τ に等しいという条件から決められる： $B_0 = 2\pi m^*/e\tau$ 。GaAs にたいしては、 $m^* = 0.06m_e$ 、 $\tau \sim 10^{-13}\text{s}$ であるから、 $B_0 \approx 3\text{T}$ 。半導体を流れる電流でこの位の磁場を作ることは実際上不可能である。ずっと小さな電流で試料は電氣的破壊を起こしてしまう。電気伝導度が著しく大きい金属の場合には、ずっと大きな電流を流すことが出来る。さらに、純粋金属では液体ヘリウム温度($\sim 4\text{K}$)に冷やしたとき、 τ は $\sim 10^{19}\text{s}$ になり、これは半導体の場合より著しく大きい。したがって、金属中の臨界磁場 B_0 は小さくなる $\sim 0.01\text{T}$ 。この値は直径 1mm の針金に 10A の電流を流したときに生ずる磁場に相当する。

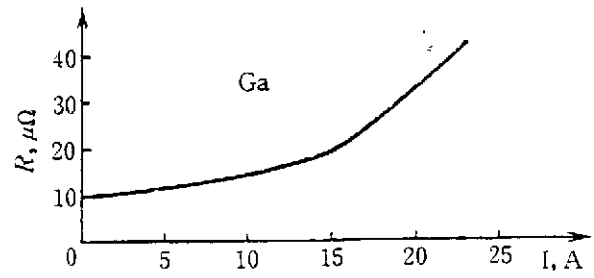


図7

図7に、ヘリウム温度で得られた、金属導体の抵抗の電流 I にたいする依存性の実験値を示した。明らかに、電流が増すと抵抗が数倍になることが分かる。この実験での電場は 10^2V/m より小さく、これは半導体でオームの法則からのずれが生ずる電場強度より著しく小さい。したがって、この場合には磁場の電気抵抗への影響がオームの法則の破れの原因である。

この論文では、オームの法則が導体で成り立たなくなる物理的な原因を明らかにした。とはいっても、技術的に最も重要な非線形素子であるトランジスタやダイオードには触れなかった。これらの素子は本質的にヘテロ構造を持ち、異なる導体の接触部でオームの法則は破れる。さらに、われわれは交流電場と交流磁場の中の導体における非線形効果にも触れなかった……。しかし〈無限を包める者はいない〉のだから仕方があるまい。

(訳 こじま ひでお)