Basic 数学 1994, No.12

32

«Квант» для младших школьников

ソ連科学誌・クヴァントから やさしい物理学 ㉖

小島　英夫（静岡大学）訳

1. 直流電流と交流電流　I. K. ベルキン (1984, No.10, pp.28 29)

長い間，唯一の電流の源として，19世紀の初めに発明された電池が使われてきた．その電池につながれた回路には直流電流（定常電流）が流れる．

電磁気学の研究の成果は，交互に変化する電流を発生する発電機の発明に用いられた．このときから，いわゆる交流電流が現代の電力経済の基礎となった．

なぜか？　交流電流の何が直流電流より〈優れて〉いるのだろうか？

交流電流は直流電流と同様に，荷電粒子の，とくに金属中では電子の，整列した運動である．しかし，交流回路においては，電子はその整列した運動の向きを何回も変える．電子の質量は小さいので，工業回路の場合のように一秒間に100回はおろか，例えば放送局のアンテナの場合のように一秒間に一千万回も運動方向を変化させることに〈成功する〉．

電気回路に交流電流を流すためには，回路に交流発電機を接続しなければならない．発電機は周期的な誘導起電力を生じ，回路の電流は，当然のことだが，誘導起電力の振動数を持つ励起された振動を行う．電源（発電機）の起電力が，時間的に $e=E_m\cos\omega t$ で表される変化をして，電源が実効抵抗 R の回路に接続されていれば，回路を流れる電流は余弦法則に従って変化する：

$$i=\frac{e}{R}=\frac{E_m}{R}\cos\omega t=I_m\cos\omega t.$$

ここで，E_m と I_m は，起電力の振幅（最大値）および電流の最大値である．余弦関数は，電流値を振動の一周期にわたって平均すると零になるという性質を持っている．しかしこれは，このような電流が利用価値がないとか，それ自体存在しないとかいうことを意味するのではない．電流の平均値が零であっても，電流の2乗の平均値は零ではない．電力は電流の2乗で決定される．任意の時刻における，実効抵抗を持つ回路を流れる電流の電力は，次の式で表される：

$$p=i^2R=I_m^2R\cos^2\omega t.$$

余弦関数の一周期にわたる平均値は零ではなく，1/2であるから，電力の平均値は次式で与えられる：

$$\overline{p}=\overline{i^2}R=\frac{1}{2}I_m^2R=\left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2R.$$

$I=I_m/\sqrt{2}$ という量は，電流の実効値である．今考えている場合には，電力は抵抗にかかる電圧をつかって表すこともできる：

$$p=\frac{u^2}{R},\quad \overline{p}=\frac{\overline{u^2}}{R}=\frac{1}{2}\frac{U_m^2}{R}=\frac{U^2}{R}.$$

ここで，$U=U_m/\sqrt{2}$ は電圧の実効値である．

交流電流の欠点の一つがここに現れている．すなわち，電流を流す導体は電流の最大値を流すのに，実際にはその値の2/3より少し大きな電流しか使わない．もう一つの欠点がある．電磁誘導の現象のために，例えば導体中の交流電流は導体の全断面積に分布するのではなく，主に表面の近くに分布する．この現象は表皮効果と呼ばれる．交流電流が侵入する深さ（侵入長）はいろいろな要因に依存するが，とくに電流の振動数に依存する．すなわち，50 Hz の振動数では銅の伝導体への侵入長は約9 mm である．振動数が増加すると侵入長は減少する．このために，導体の全断面積に電流が流れないので，抵抗が実質的に増加する．さらに，交流電流は，直流電流と同様に磁場を伴うが，それが時間的に変化する．そのような

場は電磁誘導の法則に従って，近くにある導体や伝導体に電流を誘起し，エネルギーの無駄な損失をもたらす．

これらのすべての欠点は，直流電流にはない．それではなぜ，交流電流が実際上工場や家庭で独占的に使われているのだろうか？

まず，発電機の動作原理からして，まず交流起電力を発生させるものだということがある．しかしそれは主な理由ではない．簡単な装置を付加することによって，交流発電機は直流発電機にすることができる．交流電流の〈人気〉の主な理由は，次のことである．電力エネルギーは，それが作られた場所（発電所）から，しばしば非常に離れたそれが消費される場所まで送電されなければならない．その途中で不可避的に，送られるエネルギーの一部は送電線の導体中の熱の形で失われる．この損失をあまり大きくなくするために，送電には高い電圧が使われるのである．

高電圧の必要性を理解するために，次の簡単な計算をしよう．$P=66$kWの電力を発電所から町へ電圧220Vで送電することを考える．（220V は，普通ヨーロッパで家庭用に使われている電圧である）．送電線の抵抗は0.4Ωとする．すると，送電線を流れる電流は $I=66000(\mathrm{W})/220(\mathrm{V})=300\mathrm{A}$ である．他方，送電線で失われる熱量（ジュール熱）は $Q=I^2R=(300(\mathrm{A}))^2 0.4\Omega=36000\mathrm{W}$．送られる電力の半分以上（54.5%）が送電線のなかで熱の形で失われてしまう！　そこで，同じ送電線を使って同じ電力を22000V で送電することを考えよう．このときの電流は $I=66000(\mathrm{W})/22000(\mathrm{V})=3\mathrm{A}$ であり，発生する熱量は $Q=(3(\mathrm{A}))^2 0.4(\Omega)=3.6\mathrm{W}$．損失はたったの0.005% になる！　そう言うわけで，送電線によるエネルギー輸送は，非常な高電圧，110，220，330，400，500 および750kV で行われるのである．

しかし，発電所の発電機の端子における電圧はそれより著しく低い，だいたい数千ボルトである．すなわち，送電線の一端では，電圧を高める必要があり，エネルギーを消費者に分配する前に，消費者が220V で受け取れるように電圧を低める必要がある．そのような電圧の上昇と低下は，交流電流を使わないとできない．それは電磁誘導の原理に基づいた装置である，変圧器を使って行われる．変圧器の存在が，工業的にどこでも交流電流が使われている，おそらく唯一の理由である．

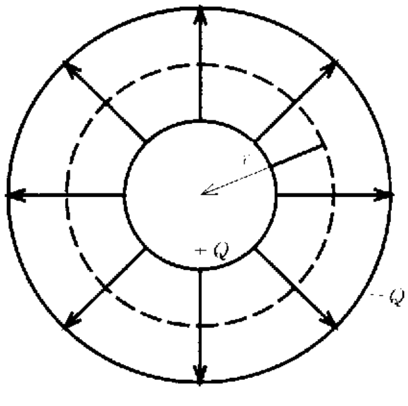
しかし，上に述べた交流電流の欠点は，同じ様な高電圧における直流を使ったエネルギー輸送が可能かどうかを考えさせる．それも出来ないことはない．実際，初めには交流電圧が必要であるが，高圧にしてから直流に変換する（それには整流器を使う）．そして送電線の他端で送られてきた直流電圧を交流に変換する（それはインバーターと呼ばれる装置を使ってなされる）．そうして消費者が必要とする値まで電圧を下げる．そのような400kV 直流電流の送電線は，すでにロシアで使われている．

この論文の内容を，直流電流は〈良い〉電流で交流電流は〈悪い〉電流だと理解してはならない．どちらにも特徴がある――これは自然現象であり，〈良い〉〈悪い〉という言葉で価値を論ずるべきではない．次のことは確かである――非常な遠方にエネルギーを送るには直流電流のほうが好ましい．そして，交流電流の直流電流への変換とその逆変換が未だ幾つかの困難を抱えているという意味で，現状では交流電流が送電には有利であるが，それらの困難もいずれ解決するだろう．工業には両方の電流を使うことが同じ様に必要とされる．ある場合には直流電流が不可欠である．たとえば，電気分解である．しかし，交流電流がなければ，ラジオもテレビも存在しない．有名な子供の詩を書き換えれば，次の様に言うことが出来る：電流はすべて必要だ！

2．変位電流　I. K. ベルキン（1984，No. 5，pp.34-35）

磁場発生の原因には，電荷の運動（電流）ばかりでなく，電場の変化があることは，良く知られている．この磁場発生の第2の原因を，マックスウエルは変位電流と呼んだ．変位電流の存在は電気力学の基本法則の一つである．そこでこの問題をもう少し詳しく考えてみよう．具体的な問題を取上げて，変位電流がいつ現れ，その大きさはどれだけかを示そう．

二つの同心球状導体の間の空間を考える（球状コンデンサー）．二つの導体は大きさQが等しく，



符号が反対の電荷で帯電しており，その間の空間には伝導性媒質が詰っている(図を見よ)．この媒質に動径に沿って電流が流れ，コンデンサーが放電したときを考える．コンデンサーの放電の際に生ずる磁場は，どのような〈配置をとるか〉？

この問題では，特定の方向は存在せず，したがって対称性の条件を満足する磁力線群を描くことができない．ということは，何を意味するのか？　球状コンデンサーを放電したときには一般に磁場が生じない，ということである．一体どうして，電流が流れても，磁場は生じないのだろうか？　つまり，磁場を生ずるもう一つの〈原因〉があり，電流の作る磁場を相殺しているのである．

球の中心から r の距離における単位断面積を通る電流の大きさ，つまり電流密度を計算しよう．全電流 i はコンデンサーの電荷の変化する速度に等しい：

$$i=\frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

この電流は半径 r の球面に一様に分布している；したがって，電流密度は

$$j=\frac{i}{S}=\frac{1}{4\pi r^2}\,\frac{\Delta Q}{\Delta t}. \tag{1}$$

コンデンサーの放電の際には，電場はどの様に変化するだろうか？　球状コンデンサーの極板の間では，電場は球の中心に電荷 Q がある場合と同じであるから，中心から r の位置での電場強度は次の式で与えられる：

$$E=k\frac{Q}{r^2}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

すると，電場強度の変化する速さは，次の様になる：

$$\frac{\Delta E}{\Delta t}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\frac{\Delta Q}{\Delta t}. \tag{2}$$

表式(1)と(2)を比較しよう．明らかに，電流密度と電場強度の時間変化率とは，互いに比例している．もし，変位電流が通常の電流と同じ様に磁場を作ると仮定すれば，コンデンサーの中に磁場が存在しない事実は二つの磁場の相殺で理解できる．変位電流密度という考えを導入し，その大きさが次の式によって与えられるとしよう：

$$j_{\rm dis}=\varepsilon_0\frac{\Delta E}{\Delta t}. \tag{3}$$

今考えている例では，コンデンサーの中の電場は減少し，電場の変化速度は負である．つまりこの場合，変位電流は電場と逆の向きに流れるのにたいして，通常の電流(真電流)は電場の向きに流れる．表式(1)〜(3)から分かるように変位電流の密度と真電流の密度とは大きさが等しい．したがって，全電流密度と全磁場は零になる(この場合はそれが当然であるが)．

表式(3)は，球状コンデンサーの放電の場合に成り立つだけでなく，最も一般的な場合にも成り立つことが分かる．磁場の誘導はいつも真電流(伝導電流)密度と変位電流密度の和で決められ，後者は，表式(3)によって電場の変化速度に関係する．

3．電流は金属中をどのように流れるか　A. A. ヴァルラモフ(1988, No. 2, pp.41-43)

この問題は，一般に学生にとって何も特別な問題を起こさない．どのように流れるか？　うん，それは簡単さ．導体，例えば金属の両端に電位差を与えると，そこに電流が流れる．金属中には自由電子があって，電位の高いほうの端に向かって電場が自由電子を加速する(電子の電荷は負である)．電荷の方向性を持った運動が生じ，それが電流である．

そのような答えは間違っている，と言うわけではない．その答えは，すべて正しい．しかし，一見したところ非の打ちどころのない答えが，一連の疑問と難点を提出する．それを詳しく検討してみよう．

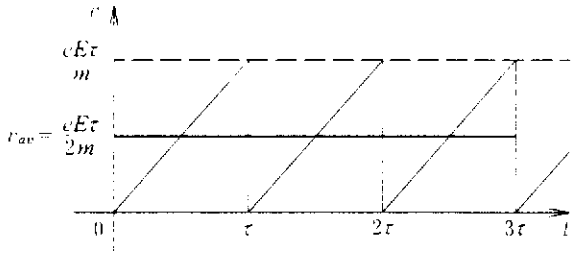
導体の両端に電位差が生じたとき，電子はどの

ような運動をするのだろうか？　電子にはいつも力 $\overline{F}=e\overline{E}$ が働いて，加速されているように見える($\overline{E}$ は導体中の電場強度である)．しかし他方，実際にそうだとすると，導体中の任意の断面を通る電流の大きさは時間と共に増加し，それはオームの法則と矛盾する．オームの法則によれば，電圧Uが一定のとき，導体を流れる電流 I は一定で $I=U/R$ で与えられる(R は導体の抵抗である)．どうなっているのだろうか？　金属の内部構造を思い出してみよう．

金属原子の価電子は原子との結合が極めて弱い．それゆえ，結晶格子を作るとき，それらは容易に原子から分離し，かなり密度の高い電子ガスとなる．(たとえ，各原子から一個の電子が分離したとしても，そのような電子ガスの密度 n は $\sim 10^{29}/\mathrm{m}^3$ になる．各自計算してみよ)．金属中の電流の流れについて上に述べたとき，われわれはそれらの電子が自由だと考えていた．限定された意味では，それは正しい．しかし，電子を取り巻く環境，すなわち結晶格子のイオンを忘れてはいけない．

19世紀の終わりから20世紀にかけて作られた，古典的な金属の電気抵抗の電子理論では，電場の作用のもとに生ずる運動の過程において，電子は結晶格子を形成するイオンと衝突すると仮定した．また，電場による加速で電子が得た全エネルギーはその衝突に際して格子に与えられる．つまり，いわゆる〈効果的な〉衝突によって，金属の電気抵抗が生ずると考えられた．電流の流れる機構を理解するためには，その他の衝突は計算に取入れる必要が無かった(電子の速度の向きが変っても，その分布と大きさは変らないので)．衝突の間の平均時間を τ としよう．すると，電場のかけられた金属中の電子の運動にたいして次の様なモデルができる．時刻 0 と τ の間に電子は加速度 $\vec{a}=e\overline{E}/m$ を受けた運動をし，したがって整列した電子運動の電場 $\overline{E}$ 方向の速度の射影は，時間に比例して増加する：$v=at=eEt/m$．時刻 τ に，電子はイオンと衝突し，その整列した運動の運動エネルギーの全てを格子に与える．そこから電子はもう一度電場によって加速され，この過程を繰り返す．整列した運動の速度の射影の，時間に対する依存性のグラフを図に示した(図)．この様な段階的等加速度運動は，電場に逆向きの，

速度 $v_{av}=eE\tau/2m$ の一様な電子の流れと考えることが出来る．この運動に付随した電流の大きさを計算しよう．



導体の中の電場に垂直な面(断面積S)を時間 Δt の間に通過する電子数は $\Delta N=nSv_{av}\Delta t$ である．その間に面を通過する電荷は $\Delta q=e\Delta N=neSv_{av}\Delta t$．したがって，導体中を流れる電流は

$$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=nev_{av}S=\frac{ne^2\tau}{2m}SE.$$

次の量

$$j=\frac{I}{S}=\frac{ne^2\tau}{2m}E$$

を，電流密度という．

この式の，電場強度Eの係数は，金属の微視的な特性だけを含んでいるが，明らかに金属の比電気抵抗 ρ の逆数に等しい．

ここで，幾つかのことがはっきりした．しかし，疑問は依然として残っている．たとえば，電子の整列した運動の平均速度を計算してみよう．断面積が $10mm^2$ の銅の針金を考える．電子密度は $n=1.67\times10^{29} 1/m^3$ である．電流が 10A のとき，平均速度は

$$v_{av}=\frac{I}{neS}=\approx0.04mm/s.$$

実験的に得られた抵抗 ρ の値を使って，有効衝突の間の時間 τ を計算すると $\tau=\sim10^{-14}s$ が得られる．それゆえ，有効衝突の間に電子が上の平均速度 $v_{av}=\sim0.1mm/s$ で運動すると仮定すると，次の様な不合理な結論に達する：衝突の間に電子が走る距離は $l=v_{av}\tau\sim10^{-18}m$．これは，格子内のイオン間の距離($10^{-10}m$ 程度)より桁違いに小さい距離である．したがって，我々はさらに何かを考え直さねばならない．ところで，金属中の電子ガスの粒子を，つねにランダムな熱運動をしている，器の中の理想気体みたいなものと考えてはいなかったろうか．そして，もしそのような類比を使い，上の $l=v_{av}\tau$ の表式で v_{av} の代りに熱運動速度 $v_{th}=\sqrt{3kT/m}$ を使っても，実験結果との一致は得られないことが分かる(各自計算してみよ)．

我々は古典物理学の可能性をすべて検討しつくしてしまった．実際に，金属の電気抵抗の最終的な理論は，20世紀の半ばに量子物理学の考えを使って初めて作られた．金属中の電子は非常な高速度 $v_e\sim0.01c$ (c は光速度)で動いていることが分かった．電子ガスのこのランダムな粒子運動は純粋に量子的なもので，熱的な起源を持たず，絶対零度でもなくならない．電子のランダムな運動の速度がそんなに大きくても，電場が無いときには導体の一定の面を通る電荷の平均輸送量は零になる．電場がかかると，このランダムな運動に，電場と逆向きな整列した電子の流れが重ね合わされることは，上に計算したとおりである．相次ぐ二つの衝突の間に電子が通過する距離はランダムな運動の速度で決まり，具体的な銅の針金の場合には原子間距離の数十倍(あるいは百倍)にもなり，これなら妥当な値である．

最後に，もう一つの意外な事実がある．量子力学の法則によれば，完全に周期的な結晶格子の中の電子は，格子を構成するイオンと全然衝突することなく運動する．すると，これまでに考えた事柄は無駄だったのだろうか？　また，電子は結晶中を運動するときそのエネルギーを格子にどのように与えるのだろうか？

低温では，電子は現実の結晶中に必ず存在する不純物原子やその他の欠陥と衝突する．それらが無いときには，結晶金属の電気抵抗はいくらでも小さくなる．室温程度の温度では，電子は主に格子振動で散乱される．もし，電子が不動のイオンで出来た格子の中で，すべての周期的に反復するイオンを〈迂回する〉ように自分の行動を〈調整できる〉としても，イオンが熱運動をしたときには電子はイオンのランダムな運動を〈監視する〉ことができず，どれかのイオンと衝突せざるをえない．

要約すれば，注意深く考察すると，電気伝導というこのような明白な問題にも〈躓きの石〉があることが分かる．　(訳　こじま ひでお)