Basic数学 '94. 8

«Квант» для младших школьников

ソ連科学誌・クヴァントから
やさしい物理学 ㉔
交流回路

A. P. ジルベルマン　小島　英夫（静岡大学）訳

交流電流(あるいは電場)は，誘起された電気的な振動である．電流の大きさは，時間的に変化し，正弦関数で表される：

$$i=I_m\cos(\omega t-\phi_0).$$

ここに I_m は振幅，ω は角(円)振動数(1 秒あたりのラジアンで測られ，単位は s^{-1} である)，ϕ_0 は振動の初期位相である．交流電圧に対しても，同じ形の式が書ける．

例．220 V, 50Hz の場合に，回路における電圧の時間依存性を書き表そう．このとき，振幅は $U_m=U\sqrt{2}=220\sqrt{2}$ V ≈ 311V($U=220$ V で，これは実際の電圧値である)，円振動数は $\omega=2\pi\nu\approx 6.28\times 50s^{-1}\approx 314s^{-1}$．もし，最初の時刻($t=0$)における電圧が $u_0=50$V で，減少していることが分かっているとしよう．すると初期位相 ϕ_0 を求めることができる：

$$u_0=U_m\cos\phi_0,$$

これから

$$\phi_0=\arccos\frac{u_0}{U_m}\approx 1.4\ \mathrm{rad}$$

(電圧が減少しつつあることを，考慮している)．したがって，

$$u=311\cos(314t+1.4).$$

われわれが任意に決定できる最初の時刻の選択によって，ϕ_0 をどんな値にも，とくに 0 にもできることが分かる．したがって，とくに断らないで次の形に書くことがある：

$$u=U_m\cos\omega t.$$

交流回路の計算は，普通与えられた電流電圧にたいして電流を求める形で行われる．もっとも簡単な場合である，抵抗だけを含む回路における電流を計算しよう．この回路の任意の点における電流は印加電圧と'拍子を合わせて'，すなわち電流と電圧の間に位相のずれがなく変化する．もし，回路にエネルギーを蓄える素子――すなわちコイルやコンデンサー――があると，問題は複雑になる．このとき電圧と電流が最大になる時刻は一致せず，固有の位相のずれが生ずる．例えば，よく知られているように，コイルを含む回路では，電流の最大値は電圧の最大値より1/4周期遅れ(位相のずれ $-\pi/2$)，コンデンサーを含む回路では，逆に1/4周期進む(位相のずれ $\pi/2$)．

直流電流回路の問題では，回路の分岐点における電流の値と含まれている素子における電圧とを単純に計算して行けばよい．しかし，交流電流の場合には少し複雑である――和の振幅は振幅の和に等しいとは限らない．例えば，1 A の二つの電流の和の振幅は，0 から 2 A までの任意の値を取りえるので，位相差をはっきりと知らなければ計算できない．交流回路の計算には，グラフ法――'ベクトル図の方法'を使うのが便利である．

ベクトル $\dot{A}_0$(長さ A_0)がその一端を中心にして反時計周りに角速度 ω で回転するとしよう．するとベクトルの他端の x 軸への射影は，始点が回転の中心にあるので，次の式で表される(図1)：

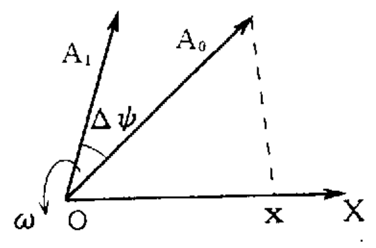

図1

$x=A_0\cos(\omega t+\phi_0)$.

これは我々にとって必要な式である．(今考えているモデルでは，円振動数は角速度と正確に同じである)．この図に，振幅 A_1，初期位相 ϕ_1 のもう一つのベクトル $\dot{A}_1$ を描くことができる．$\phi_1>\phi_0$ のとき，$\dot{A}_1$ は $\dot{A}_0$ より角度 $\Delta\phi=\phi_1-\phi_0$ だけ'進んでいる'という．重要なことは，A_0 と A_1 は違う次元を持つ量でもよいことである．(例えば，A_0 はボルトで測られ，A_1 はアンペアで測られる量であってもよい)．

それでは，この方法を説明しよう．'ベクトル図'とは何だろうか．これは考えている回路の電圧と電流をベクトルの形に描いたものである(予め決めた尺度と位相のずれとを使って)．我々が考えている調和振動の例では(いつも成り立つとは限らない！)，すべてのベクトルは同じ向きに，同じ角速度 ω で回転し，ベクトル間の角度は一定である．したがって，回転については考える必要はなく，'動かない'図を描けばよい．もし図が描ければ，問題は解けたも同然である．なぜならば，そこには考えている回路の電圧と電流についての必要な情報がすべて含まれている．ベクトル図を描く方法――それが問題の核心である．

それでは具体的な例をいくつか考えよう．

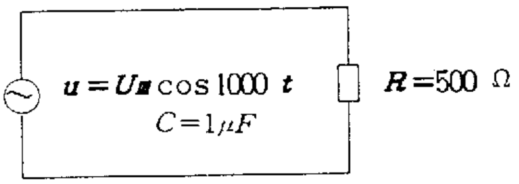

図 2

問題 1．図 2 にはコンデンサーと抵抗を直列に連結した簡単な交流回路が描かれている．回路の電流の振幅は $I_m=0.1$ A である．電源電圧の振幅と回路の電圧と電流の位相差を求めよ．

電流と電圧を描くための尺度は適当に選ぶことにする．$\dot{I}_m$ を任意に取る(我々の都合のいいように)(図 3)．次に，抵抗における電圧降下を表すベクトル $\dot{U}_{Rm}$ を描く(電圧と電流のベクトルを混同しないように，太さを違えて描くことにする)．その大きさ次のようになる：

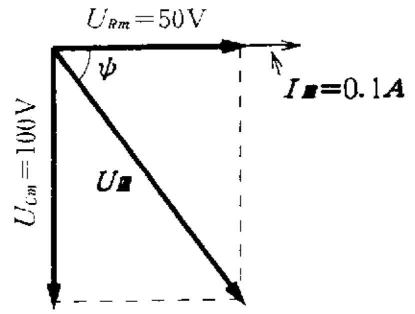

図 3

$$U_{Rm}=I_mR=50\text{ V}.$$

ベクトル $\dot{U}_{Rm}$ の向きはベクトル $\dot{I}_m$ と一致する(なぜならば，抵抗の電位差と電流の位相差はつねに 0 である)．コンデンサにおける電圧 $\dot{U}_{Cm}$ は，大きさが $U_{Cm}=I_mX_C=100$ V で，位相は電流より $\pi/2$ だけ遅れる．ここで $X_C=1/(\omega C)=1$ kΩ は容量リアクタンスである．このベクトルを描こう．電源の電圧 $\dot{U}_m$ は $\dot{U}_{Rm}$ と $\dot{U}_{Cm}$ との和に等しい：

$$U_m=\sqrt{U_{Rm}^2+U_{Cm}^2}\approx 112\text{ V}.$$

次の事に注意しよう．我々は既に電流 $\dot{I}_m$ と全回路の電圧 $\dot{U}_m$ の間の角を求めた(描いた！)のである．この角は分度器で測っても，三角法で計算してもよい：

$\tan\phi=U_{Cm}/U_{Rm}=2$,　$\phi=\arctan 2\approx 1.1\text{ rad}\approx 64°$

この問題は少し違った形で考えることも出来る：電源電圧の振幅を，例えば 220 V と与え，回路の電流の振幅を求める．このような方法は，電流の振幅 I_m' を知らずに図を描かなければならないので，少し複雑である．とにかく二つの方法がある．第一は，電流 I_m が与えられたとき電圧の振幅 U_m を求めるという補助的な問題を解き(我々はそのような問題だけを考えた)，それから自明な関係式

$$\frac{U_m'}{U_m}=\frac{I_m'}{I_m}$$

を書き，それを使って電流の振幅 I_m' を求める：

$$I_m'=I_m\frac{U_m'}{U_m}\approx 0.18\text{ A}.$$

第二の可能性は，図を具体的な尺度を決めずに，一般的な形に描く．その際に，すべてのベクトルの長さの関係を一定に保つと，ベクトル間の角度

は変化しない．図から得られる関係

$$U_m'=\sqrt{(U_{Rm}')^2+(U_{Cm}')^2}=\sqrt{(I_m'R)^2+(I_m'X_C)^2}$$

を使って，I_m' を計算する：

$$I_m'=\frac{U_m'}{\sqrt{R^2+X_C{}^2}}\approx 0.18\,\mathrm{A}.$$

これらの方法は，複雑さの点では似たようなものである．

問題 2．交流電源に二つの分岐回路を並列に接続した．第一の分岐回路を流れる電流は $I_{1m}=1$ A で，第二の分岐回路の電流は $I_{2m}=0.3$ A である．電源を流れる電流の振幅はどの範囲に有るか？　全電流と第一の分岐電流の間の位相差の最大値はいくらか？

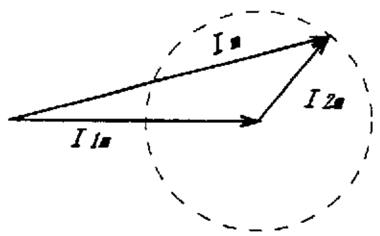

図 4

問題の回路に対するベクトル図（図 4）から，解はただちに得られる（ベクトル $\vec{I}_{2m}$ をベクトル $\vec{I}_{1m}$ にたいして適当に傾けて描いた）：

$$I_{1m}-I_{2m}\leqq I_m\leqq I_{1m}+I_{2m},$$

$$0.7\,\mathrm{A}\leqq I_m\leqq 1.3\,\mathrm{A}$$

$\vec{I}_m$ と $\vec{I}_{1m}$ の間の最大角度は，$\vec{I}_m$ が円に接する場合である：

$$\sin\varphi_{\max}=\frac{I_{2m}}{I_{1m}}=0.3,$$

$$\varphi_{\max}\approx 0.31\,\mathrm{rad}\approx 18^\circ.$$

このとき $I_m=\sqrt{I_{1m}{}^2-I_{2m}{}^2}\approx 0.95$ A．$\dot{I}_m$ と $\dot{A}_{2m}$ のつくる角は（$-\pi\sim+\pi$）の間の任意の値を取り得る．

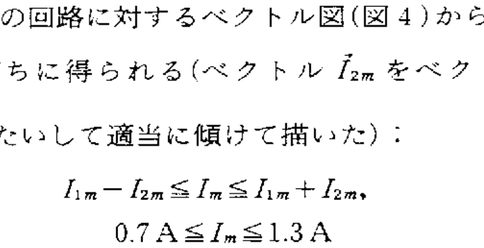

図 5

問題 3．図 5 に示した回路に於いて，電源を流れる電流および，この電流と電源電流の位相差を求めよ．

回路を流れる電流を与える図を描くことから始めよう．例えば，$I_{Lm}=0.1$ A と置く．すると，コイルにおける電位差は $U_{Lm}=I_{Lm}X_L=100$ V．ここで $X_L=\omega L=1\,\mathrm{k\Omega}$ は誘導リアクタンスであり，$\vec{I}_{Lm}$ は位相差 $\pi/2$ で決められる（図 6）．抵抗値 R_2 の抵抗を流れる電流はこの電位差で決められ，位相はそれと一致する：

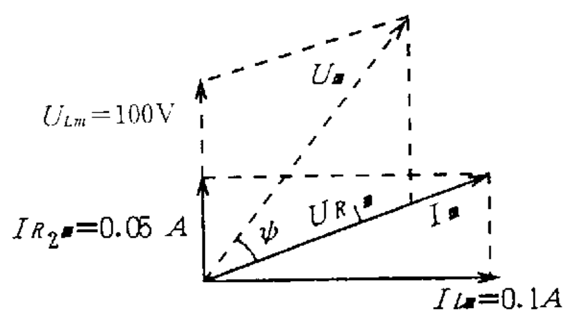

図 6

$$I_{R_2m}=\frac{U_{Lm}}{R_2}=0.05\,\mathrm{A}$$

したがって，全電流は

$$I_m=\sqrt{I_{Lm}{}^2+I_{R_2m}{}^2}\approx 0.112\,\mathrm{A}$$

抵抗値 R_1 の抵抗における電位差 $\dot{U}_{R_1m}$ はこの電流と位相が一致し，次の大きさを持つ：

$$U_{R_1m}=I_mR_1\approx 112\,\mathrm{V}$$

これから全電位差 $\dot{U}_m$（ベクトル $\dot{U}_{R_1m}$ と $\dot{U}_{R_2m}$ の和）を求める．簡単な計算によって次の値を得る（図を正確に描けば，図の上で求めることもできる！）：

$$U_m\approx 180\,\mathrm{V},\quad \varphi\approx 0.52\,\mathrm{rad}\approx 30^\circ$$

これらの値は，最初の仮定（$I_{Lm}=100$ V）によって決められているので，正しい尺度に戻した値を求めよう．与えられた電源電圧における回路の全電流は次のようになる：

$$I_m'=I_m\frac{U_m'}{U_m}\approx 0.112\frac{200}{180}\,\mathrm{A}\approx 0.124\,\mathrm{A}$$

その他の電流と電位差は $U_m'/U_m\approx 1.1$ 倍されるが，位相差は変らない．

コイルやコンデンサーのような応答性の回路素子は，回路中の電圧と電流の間に一定の位相差を創り出すために用いられる．

問題 4．交流発電機に 2 個の同じコイル（それぞれインダクタンス $L=1\mathrm{H}$）が含まれている．

定常運転においては，コイルを流れる電流は等しく，それらの間の位相差は $\Delta\varphi=\pi/2$ でなければならない．回路（$U=220\,\mathrm{V}$，$\nu=50\,\mathrm{Hz}$）に組込むとき，一方のコイルは直接，他方は容量Cのコンデンサーおよび抵抗値Rの抵抗と組合わせて用いることにする．必要なCとRの値を計算せよ．コイルでの損失は無視してよい．

回路に直接接続したコイルの電流は，回路の電圧にたいして位相が $\pi/2$ だけ遅れる．その大きさは

$$I_1=\frac{U}{X_L}=\frac{U}{2\pi\nu L}\approx 0.7\,\mathrm{A}.$$

次の事に注意しよう．われわれは，与えられた電圧の実効値Uに対する電流の実効値を求めようとしているのである．明らかに，ベクトル図は実効値に対しても，最大値にたいしても描くことができる——最大値にたいする図を描きさえすれば，それが実効値にたいする図にも成る．

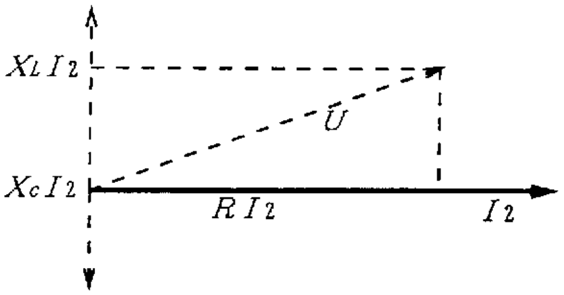

図 7

次に，RCL 直列回路にたいするベクトル図を描こう（図 7）．すべてのベクトルに共通の原点を使うことにする．回路の電流に対応するベクトル $\dot{I}_2$ を引く．電圧 $\dot{U}_R$（$U_R=I_2R$）は電流と位相が一致し，電圧 $\dot{U}_C$（$U_C=I_2X_C$）は $\pi/2$ だけ遅れ，電圧 $\dot{U}_L$（$U_L=I_2X_L$）は $\pi/2$ だけ進む．全電圧 $\dot{U}$ の位相は，電流 $\dot{I}_2$ と一致し，$\dot{I}_1$ と $\dot{I}_2$ とは位相差が $\pi/2$ である．図から分かるように，この条件を満たすためには，次の関係が成り立つことが必要である：

$$X_C=X_L,\quad \frac{1}{\omega C}=\omega L,$$

$$C=\frac{1}{\omega^2 L}=10^{-5}\mathrm{F}=10\mu\mathrm{F}.$$

さらに，$I_2=I_1=U/R$，であるから

$$R=\frac{U}{I_1}\approx 314\,\Omega.$$

つぎのことに注意しよう．この様な回路の計算を実際の場合に行うことは非常に難しい．というのは，発電機に負荷をかけたときのコイルの電流と電圧の位相差は理想的な場合の値 $\pi/2$ ではなく，発電機の軸にかかる負荷に依存するからである．

交流回路におけるエネルギーの計算は，仕事率の瞬間値が変化するために複雑になる．電源のなす仕事や回路に生ずる熱を計算するのに，仕事率の平均値および瞬間仕事率の最大値を考えることができる．

問題 5．電源電圧の大きさを U_m，そこを流れる電流の大きさを I_m，電圧と電流の位相差を φ とする．長い時間Tの間に電源のする仕事と瞬間仕事率の最大値とを求めよ．

瞬間仕事率にたいする式を書き，それを使いやすい形に変形しよう：

$$p=ui=U_mI_m\cos\omega t\cos(\omega t-\varphi)$$
$$=\frac{1}{2}U_mI_m\cos(2\omega t+\varphi)+\frac{1}{2}U_mI_m\cos\varphi.$$

長い時間（振動の周期より極めて長い）における第一項の平均は零である．従って，仕事率の平均値は

$$\overline{P}=\frac{1}{2}U_mI_m\cos\varphi$$

であり，電源のする仕事は

$$A=\overline{P}\,T=\frac{1}{2}U_mI_mT\cos\varphi.$$

仕事率の瞬間値の第一項の最大値は $(1/2)U_mI_m$ であり，したがって，

$$P_m=\frac{1}{2}U_mI_m(1+|\cos\varphi|).$$

$|\varphi|\approx\pi/2$ のとき，最大仕事率は平均値を大幅に上回ることが分かる．これは，電気回路がエネルギーを蓄え，それを後から電源へ戻すことと関係している．電源回路にとって，このような動作は非常に都合が悪い——そこに含まれている導体における熱損失を増加させる．そのような回路の例は昼光電球である．大きなインダクタンスを持つコイルを使って電流を制限し，位相のずれを $\pi/2$ に近くする．解決は簡単である——回路に並列にコンデンサーをつなぐ．その容量を適当に選べば（どのように選べばよいかを考えてみよ），コイルとコンデンサーはエネルギーを互いに交換し，回

路からは有効な仕事だけが取り出される．

問題 6．夜間の回路の電圧の実効値が 220 V から 190 V に下がる．湯沸かし器の出力を昼間の水準に維持するためには，電圧を一定に保つための補助電源をつなぐとよい．回路の電圧が最も低いときどのような電圧 U_i の電源をつないだらよいか？

湯沸かし器にかかる電圧は

$$u=U_{2m}\cos\omega t+U_i$$

である．ここで $U_{2m}=190\sqrt{2}$ V は回路の電圧の最大値である．湯沸かし器の電圧と電流の位相差は零である（湯沸かし器は抵抗器である）．したがって，平均仕事率は

$$\overline{P}=\frac{\overline{u^2}}{R}=\frac{U_{1m}^2}{2R},$$

ここで $U_{1m}=220\sqrt{2}$ V である．ところで，

$$\overline{u^2}=\overline{U_{2m}^2\cos^2\omega t}+U_i^2+2U_i\cdot\overline{U_{2m}\cos\omega t}$$

$$=\frac{U_{2m}^2}{2}+U_i^2.$$

これから，

$$U_i=\sqrt{\frac{U_{1M}^2}{2}-\frac{U_{2m}^2}{2}}\approx 110\text{ V}.$$

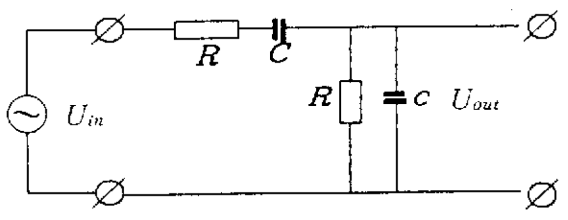

図 8

練習問題 1．図 8 に示した回路はウィーン・ブリッジと呼ばれる．どのような周波数のときに入力と出力電圧の位相差は零になるか？　その周波数において，出力電圧は入力電圧の何倍になるか？

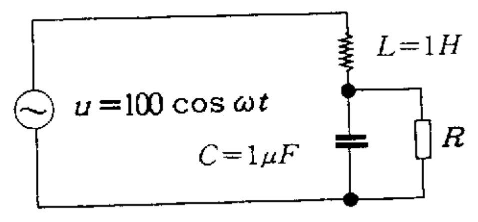

図 9

練習問題 2．図 9 に示した回路において，周波数 $\omega=1/\sqrt{LC}$ のときに，抵抗を流れる電流がその抵抗値によらないことを証明せよ．その電流を求めよ．

前回（BACIC 数学，'94. No. 6）の練習問題の答

1．間隔が n 倍になったとすると $\frac{n-1}{n+1}CU^2$.

2．$\frac{1}{6}CU^2$.

3．$\frac{d_1}{2d(d-d_1)\varepsilon_0 SE^2}$.

4．$\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sd$.

5．ばねの弾性定数は，少なくとも $\frac{\varepsilon_0 S}{d^3}U^2$ より大きくなければならない．

（訳　こじま　ひでお）