«Квант» для младших школьников

ソ連科学誌・クヴァントから

やさしい物理学 ㉑

小島　英夫（静岡大学）訳

Japanese translation rights arranged with VAAP through Japan Soviet Copyright Center. Tokyo.

電場のエネルギー(2)　V. モジャエフ (1991, No. 8, pp. 58-63)

われわれが，帯電したコンデンサーはエネルギーを持っている，というとき，幾つかの疑問が生ずる．そのエネルギーはどこから得られたのか？それはどこに蓄えられているのか？　どの様な形で？　実際にコンデンサーにエネルギーが蓄えられていることは，非常に簡単に分る．もし例えば，コンデンサーを抵抗を通して放電させれば，抵抗は熱せられる．また確かに，だれでも知っているように，雷が（巨大なコンデンサー《雲ー地球》の中で）放電する時に，どんなに大きなエネルギーが放出されることか．上に述べられた疑問に答えるために，幾つかの具体的な問題を考察しよう．

問題 1　孤立した球形の空気コンデンサーがある．極板の半径は R_1（内側）および R_2（外側）で，電荷は Q である．$R_2-R_1 \ll R_1$ の場合に，極板の間の電場のエネルギー密度を求めよ．

明らかに，コンデンサーを満たすエネルギーは，帯電の方法には依らない．例えば，電荷を次のように蓄えよう．無限遠から電荷を少しずつ持ってきて，極板に蓄える．まず，内部の球に帯電させる．そこに電荷 q があるときに，さらに電荷 Δq を持ってくるとしよう．その時，我々のする仕事は

$$\Delta A=(1/4\pi\varepsilon_0)(q\Delta q/R_1).$$

この式は，帯電した球のポテンシャルが $q/(4\pi\varepsilon_0 R_1)$ であることを知れば，直ちに得られる．また，クーロンの法則だけから導くこともできる；経路の微小部分に対する仕事を表す式を書き，それを電荷を移動させる全経路について積分する：

$$\Delta A=-(1/4\pi\varepsilon_0)\int_\infty^{R_1}(q\Delta q/r^2)dr =(1/4\pi\varepsilon_0)(q\Delta q/R_1).$$

したがって，内部球に電荷 Q を貯えるために必要な仕事が，次の式で与えられることは明らかである：

$$A_1=\int_0^Q(1/4\pi\varepsilon_0)(q/R_1)dq=Q^2/8\pi\varepsilon_0 R_1.$$

次に，外部球に帯電させよう．簡単のために，内部球の電荷は正電荷であるとしよう．外部球には負の電荷を帯電させるのだが，その途中の段階における電荷を $-q$ とする．すると，次の電荷 Δq は二つの電荷による電場の中に存在する：電荷 $+Q$（内部球上）による場と $-q$（外部球上）による場である．したがって，さらに電荷 $-\Delta q$ を半径 R_2 の球に与えるための仕事は

$$\Delta A=-(1/4\pi\varepsilon_0)(Q\Delta q/R_2)+(1/4\pi\varepsilon_0)(q\Delta q/R_2).$$

となり，仕事の総和は

$$A_2=-Q^2/4\pi\varepsilon_0 R_2-Q^2/8\pi\varepsilon_0 R_2=-Q^2/8\pi\varepsilon_0 R_2$$

このようにして，コンデンサーは考えている状態に帯電され，そこに貯えられたエネルギーは次の式で与えられる：

$$W=A_1+A_2=(Q^2/8\pi\varepsilon_0)(1/R_1-1/R_2).$$

このエネルギーは電場のエネルギーの形でコンデンサーの極板の間に局在している．$R_2-R_1 \ll R_1$ であるから，電場は一様であると考えられ，その強さは

$$E=Q/4\pi\varepsilon_0 R_1^2=Q/4\pi\varepsilon_0 R_2^2.$$

電場の全エネルギーを電場強度 E を使って表

＊）本誌1993，No.11，やさしい物理学(20)，2．電場のエネルギー，参照

す：

$$W=(Q^2/8\pi\varepsilon_0)(1/R_1-1/R_2)$$
$$=(Q^2/8\pi\varepsilon_0)(\varDelta R/R_1^2)=2\pi\varepsilon_0 E^2 R_1^2 \varDelta R.$$

空間におけるエネルギー密度wを求めるために，上の値を電場の占める体積 $V=4\pi R_1^2 \varDelta R$ で割ると

$$w=W/V=\varepsilon_0 E^2/2.$$

われわれは空気コンデンサーを考察し，実質的に真空中の電場の場合と同じ，空間的なエネルギー密度を得た．この式を，誘電率が $\varepsilon\neq1$ の媒質を含むコンデンサーに対するものに変形しよう．この場合には，同量の電荷を極板に与えるために必要な仕事は $1/\varepsilon$ 倍となる．しかし，電場強度も $1/\varepsilon$ 倍になるので，空間的エネルギー密度の式は，次の形に書ける．

$$w=\varepsilon\varepsilon_0 E^2/2.$$

次のことに注意しよう：この結果は，コンデンサーに誘電体を満たした時，エネルギー密度が ε 倍になることを意味するのではない（帯電量が同じ時）．実はまったく逆で，コンデンサーのエネルギーは $1/\varepsilon$ 倍になるのである．なぜならば，電場強度が $1/\varepsilon$ 倍になるので，積 εE^2 は $1/\varepsilon$ 倍になる．ここで，もしコンデンサーの極板間の電位差を一定に保つと，コンデンサーに誘電体を満たしたとき電場強度は以前と変らず，コンデンサーのエネルギーはε倍になる．

問題2　帯電していない導体球殻の中心に，最初それから遠く離れていた，電荷 Q を帯電した小球を持っていくために必要な最低の仕事はどれだけか（図1）？　球殻の内半径は R_1 で，外半径は R_2 である．球殻が孤立しているときと，接地されているときの，二つの場合を考えよ．

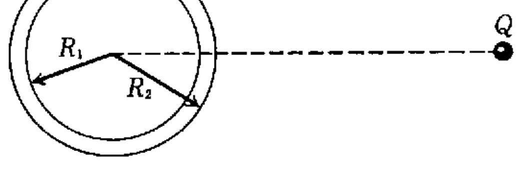

図1

まず，最小の仕事は，電荷がゆっくりと（準静的に）動かされ，球殻内に誘起された電荷が移動する際の熱の発生が無視できるときに実現されることに注意する．

それでは，問題を解こう．エネルギー保存則により，仕事は考えている系（電荷と球殻）の終状態と始状態のエネルギー差に等しいことは明らかである：

$$A=W_{\rm f}-W_{\rm i}.$$

まず，球殻が接地されていない（孤立している）場合を考える．電荷Q（簡単のため正に取る）は球殻から遠く離れており，始状態における系の電気的エネルギーは，電荷Qの電場のエネルギーだけである：

$$W_{\rm i}=W_Q.$$

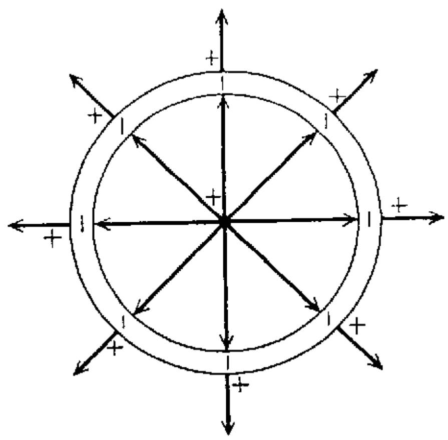

図2

終状態の電場配置を図2に示した．電荷Qの電場から，半径 R_1, R_2 の球状の層の部分が排除されていることが分る．それゆえ，終状態における電場のエネルギーは

$$W_{\rm f}=W_Q-W_{12}$$

となる．W_{12} は半径 R_1, R_2 の球状の層の電場のエネルギーである．このエネルギーは《正攻法で》計算できる——電場のエネルギー密度は分っているので，球状の層の全体積について総和を取れば（積分すれば）よい．問題1で求めた，帯電した球状コンデンサーの電場の式を使う：

$$W_{12}=(Q^2/8\pi\varepsilon_0)(1/R_1-1/R_2).$$

したがって，はじめの場合に必要な仕事は，次の式で与えられる：

$$A_1=W_{\rm f}-W_{\rm i}=(W_Q-W_{12})\times W_Q$$
$$=-W_{12}=-(Q^2/8\pi\varepsilon_0)(1/R_1-1/R_2).$$

次に，接地された球殻の場合を考えよう．電荷Qが中心にある場合の電場の配置を図3に示した．この場合には，全体でQの，負の電荷が球殻に流れ込む．この電荷は球殻の内面に分布し，電場は半径 R_1 の球の内部にだけ存在する．このエネルギーを W_1 と書くと，この場合の仕事は次の

ようになる：

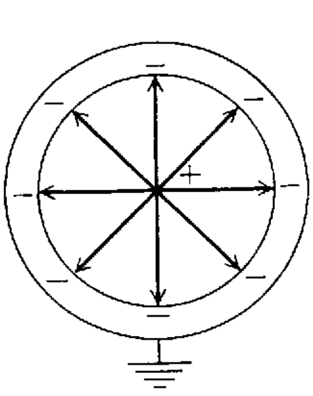

図 3

$$A_{\text{II}} = W_{\text{f}} - W_{\text{i}} = (W_Q - W_{\text{i}}) - W_Q$$
$$= -W_{\text{i}} = -Q^2/8\pi\varepsilon_0 R_1.$$

この結果は，A_{I} にたいする式で $R_2 \to \infty$ と置くことによって，直接得ることもできる．

問題 3　図 4 の回路で，スイッチ K を入れたときに，抵抗値 R の抵抗で生ずる熱量はどれだけか？ スイッチを入れる前は，容量 C_1 のコンデンサーには電荷 q_1 が，容量 C_2 のコンデンサーには電荷 q_2 が存在した．

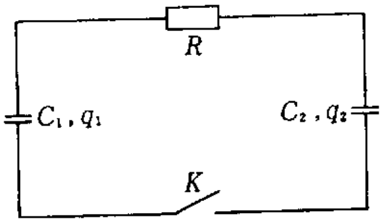

図 4

エネルギー保存則によって，発生する熱量はスイッチを入れる前のコンデンサーのエネルギーと後のエネルギーの差に，すなわち始状態と終状態のエネルギー差に等しい：

$$Q = W_{\text{i}} - W_{\text{f}}.$$

スイッチを入れる前に，コンデンサーに存在した全エネルギーは

$$W_{\text{i}} = q_1^2/2C_1 + q_2^2/2C_2.$$

スイッチを入れて，新しい定常状態が実現した後のコンデンサーのエネルギーを求めるためには，コンデンサーの新しい電荷を計算しなければならない．容量 C_1 のコンデンサーから電荷 q が失われたとすると，新しい電荷は $q_1 - q$ である．全電荷の保存則から，容量 C_2 のコンデンサーの電荷は $q_2 + q$ になる．電荷の流れが停止するためには，両コンデンサーの電位が等しくなることが必要である：

$$q_1 - q/C_1 = q_2 + q/C_2.$$

この式を解いて，移動した電荷 q が得られる：

$$q = (q_1C_2 - q_2C_1)/(C_1 + C_2).$$

したがって，コンデンサーに蓄えられている新しい電荷は次のようになる：

$$q_1' = q_1 - q = \{C_1/(C_1 + C_2)\}(q_1 + q_2),$$
$$q_2' = q_2 + q = \{C_2/(C_1 + C_2)\}(q_1 + q_2).$$

コンデンサーの中に新たに存在するエネルギーは，

$$W_{\text{f}} = q_1'^2/2C_1 + q_2'^2/2C_2$$

である．したがって，発生する熱量は

$$Q = W_{\text{i}} - W_{\text{f}} = (q_1C_2 - q_2C_1)^2/\{2C_1C_2(C_1 - C_2)\}.$$

この結果から分るように，Q は R に依存しない．では抵抗の役割は何だろう？　その大きさはエネルギーの消失（散逸）の速さに影響する――R が小さければ熱の発生はより強く，その時間は短い，ということが分る．

問題 4　帯電した平面空気コンデンサーの中へ，誘電率 ε の媒質を挟んだ，帯電した他のコンデンサーを挿入するために必要な仕事はどれだけか（図 5）？ コンデンサーの電荷は，それぞれ Q_1 と，Q_2，極板の面積はそれぞれ S，極板間の距離は d_1 および d_2 である（$d_1 > d_2$）．

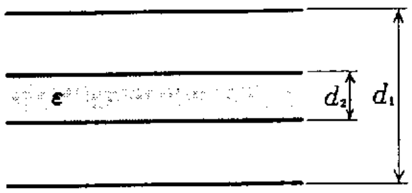

図 5

この問題を解くために，エネルギー的方法を使う．明らかに，電荷 Q_2 を持つコンデンサーを電荷 Q_1 を持つコンデンサーに挿入するために必要な仕事は，終状態の配置における電場のエネルギーから始状態の配置の電場エネルギーを引いたものに等しい：

$$A = W_{\text{f}} - W_{\text{i}}.$$

始状態では，どちらのコンデンサーも孤立していたから，エネルギーの総和は次のように与えられる：

$$W_{\text{i}} = Q_1^2/2C_1 + Q_2^2/2C_2$$
$$= Q_1^2 d_1/2\varepsilon_0 S + Q_2^2 d_2/2\varepsilon\varepsilon_0 S.$$

系の終状態における電場のエネルギーは，上に求めた電場のエネルギー密度の式から得られる．

一様な電場を持つ二つの体積を考える：電荷 Q_2 を持つコンデンサーの体積 $V_2=Sd_2$ と極板間の空気の間隙の全体積 $V_1=S(d_1-d_2)$. 体積 V_1 における電場強度は外部の極板の電荷の表面密度で決まる：$E_1=Q_1/\varepsilon_0 S$. 体積 V_2 における電場強度は両極板の電荷の和と内部のコンデンサーを満たす媒質の誘電率 ε で決まる：$E_2=(Q_1+Q_2)/\varepsilon\varepsilon_0 S$. したがって，系の終状態のエネルギーは，次式で与えられる：

$$W_f=(\varepsilon_0 E_1^2/2)V_1+(\varepsilon_0 E_2^2/2)V_2$$
$$=(1/2\varepsilon\varepsilon_0 S)\{Q_1^2(\varepsilon d_1-\varepsilon d_2+d_2)$$
$$+2Q_1Q_2d_2+Q_2^2d_2\}.$$

したがって，電荷 Q_2 を持ったコンデンサーを電荷 Q_1 を持ったコンデンサーに挿入するために必要な仕事は，次式で与えられる：

$$A=W_f-W_i=(Q_1d_2/2\varepsilon\varepsilon_0 S)\{2Q_2-(\varepsilon-1)Q_1\}.$$

得られた結果を考察しよう．この式には二つの項がある——第一項は真空の（空気）コンデンサー（$\varepsilon=1$）を挿入するために必要な仕事で，第二項は厚さ d_2 の誘電体（$Q_2=0$）を挿入するための仕事である．第一項の前の符号は，電荷の積に関係している：もし $Q_1Q_2>0$ であると，外部から正の仕事をしなければならず，したがって，電荷 Q_2 と誘電率 ε を持つコンデンサーには，押出す向きに力が働く；もし $Q_1Q_2<0$ であると，コンデンサーは引き込まれ，外部から負の仕事をすることになる．第二項の前の符号はつねに負である——誘電体の板は，いつでも電場の占める領域に引き込まれる．一般の場合には，仕事の総和 A は，正，負，あるいは零になり得る．

次のことに注意しよう．この問題を解く時に，我々は端の影響を無視した；すなわち，コンデンサーの極板上の電荷がつくる全電場は，極板によって限られた領域に局在し，また一様であると仮定した．この近似は極板間の距離が極板の大きさに較べて小さければよりよく満たされる．

すべては，正常で自然であるようにみえる．しかし，逆説的なことが起る．この効果の数値的な計算に際して，われわれはこの効果を無視したのだった．実際，一個のコンデンサーを他のコンデンサーに挿入する際の仕事は，基本の（動かさない）コンデンサーの電場へ側面から挿入されるコンデンサーにはたらく力の作用に基づいている．しかし，われわれはこの効果を無視した．一体どうなっているのだろうか？　実際は，矛盾は存在しない——力はコンデンサーの端の電場の大きさにではなく，極板の端から移動するときに電場が変化する大きさに依存する．コンデンサーの極板間の距離が極板の大きさに較べて小さい時には，コンデンサーの外の電場の大きさは急激に減衰し，電場の力線のわずかな部分だけがコンデンサーの体積の境界の外に出る．

問題 5　平面空気コンデンサーが，誘電率 ε，密度 ρ の液体の表面に接触している．毛細管現象を無視して，コンデンサー内に液体が上がる高さを求めよ．極板間には一定の電位差 U が在るとし，極板間の距離を d とする（図 6）．

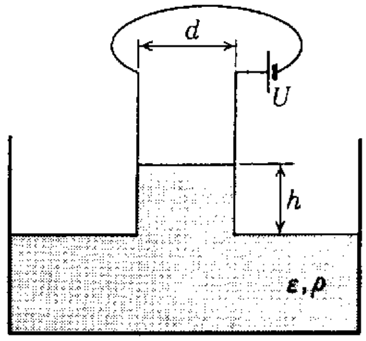

図 6

電源のスイッチを入れた後の，コンデンサーの極板間の液面の高さを h とする．任意の閉じた系は，最小のポテンシャルエネルギーを持つ安定状態に落ち着く．

考えている系の全エネルギーを書き出そう．そこには，コンデンサーの電場のエネルギー，電源に蓄えられたエネルギー，重力場中の液体のポテンシャル・エネルギーが含まれる．誘電性液体によって部分的に占められたコンデンサーのエネルギー W_C は，今の場合次のように与えられる：

$$W_C=CU^2/2=\{\varepsilon_0 S(L-h)/dL+\varepsilon\varepsilon_0 Sh/dL\}$$
$$=[\varepsilon_0 S\{L+(\varepsilon-1)h\}/dL](U^2/2).$$

電源のエネルギー W_U は，始めに貯蓄されていたエネルギー W_0（コンデンサーに接続する前）とコンデンサーを帯電させるとき電源のした仕事の差として表される：

$$W_U=W_0-qU=W_0-(CU)U=W_0-2W_C.$$

持ち上げられた液体のポテンシャル・エネルギー W_g は，次の式で与えられる：

$$W_g=\rho g d h^2 S/2L.$$

（P.76へつづく）

微積分学周遊

梶原　穀 著　　A5　2781円

教養微積分のさまざまな分野からいろいろな問題を例にとって解説する．例題のあとに問を入れ，それに詳細な解答を付し，独習書として使う際の便宜もはかった．また，微積分に関連する線型代数も例題形式で入れてあるので，微積分の理解が深まるとともに，線型代数のありがた味も認識できる．

多変量解析の徹底研究

R.A.ジョンソン
D.W.ウイッチャン 著　西田俊夫訳　A5・700頁　7800円

理論・応用両面にわたり，紙幅を十分とってきわめてわかりやすく解説している．

まず行列の初歩から説きはじめるが，解析学は使わず，線形代数の範囲で解説し，解説できないところは文献をあげて証明を委ねている．

応用については，各分野の実例を豊富に与えている．これらの実施例は応用の説明だけでなく，計算手法の説明にもうまく役立っている．また人為的な例でなく，大気汚染，疾病，選手の収入と球団の勝率といった興味深い例が多い．

豊富な数値例，練習問題を，ＹＨＰの28Ｓ，48ＳＸ，シャープのＰＣ－Ｅ500 の電卓でこまめにフォロウすれば，実践的な知識をまちがいなく身につけられるであろう．訳書には解答もついている．

多変量解析とその応用

B.フラーリー/H.リードウィル 著
田畑吉雄 訳　　Ａ５　3296円

表やグラフなどをふんだんに用い，直観的に理解できるように工夫されている．多変量解析を適用する場合，コンピュータプログラムが利用可能であるが，各手法の本来の意味を理解していなければ，なんら意味のある結果を獲得できない．このような状況を解決するために書かれた書物である．

現代数学社　〒606京都市左京区鹿ケ谷西寺ノ前町1　☎(075)751－0727　振替京都1－11144

ば１度に集計できますが，それ以外の分析は現在の HALBAU では制御する変数を指定して，１層毎に行うしか方法はありません．ただし，まもなく公開される新しいバージョンでは層別化の変数を指定して，層毎に各基礎統計が行えるようになっています．

文献

1) 深谷　汎 他，「栃木市におけるインフルエンザ調査・報告」
日本医事新報　No.3473，22 29頁（1990）

2) 高木廣文・佐伯圭一郎・中井里史，「HALBAU によるデータ解析入門」，現代数学社（1989）

3) 丹後俊郎 他，「インフルエンザ予防接種の効果について――見かけの効果の検出――」日本公衆衛生学雑誌，37巻12号，967 977頁（1990）

4) 佐藤俊哉・前田和甫，「疫学研究から得られる層別データの要約――Mantel-Haenszel 推定量とそれに基づく信頼区間の推定――」，日本公衆衛生学雑誌，34巻５号，255-260（1987）

謝辞　共に調査を行い，様々なアドバイスを頂いた，深谷汎先生をはじめとする，栃木保健所地区保健対策協議会インフルエンザ調査専門委員会の諸先生方に深く感謝いたします．

（さいき　けいいちろう）

（P69からつづく）

考えている系の全エネルギー W は安定な平衡状態で最小になるから，その変数（高さ）に対する微係数をゼロと置く：

$$dW/dh=0,$$

$$-\varepsilon_0 S(\varepsilon-1)U^2/2dL+2\rho gdhS/2L=0.$$

これから，持ち上げられた液体の，求める高さが得られる：

$$h=\varepsilon_0(\varepsilon-1)U^2/2\rho gd^2.$$

ここで与えた解法では，この系で生ずるエネルギー損失を考えなかったが，当然次の様な疑問が起り得る：その損失は上昇した液体の高さに影響しないのだろうか？　我々は系の定常状態を取り扱っているので，最小のエネルギーを持つ状態を考えることになる．我々の系はそのようなものであるが，系にエネルギーの損失があれば電源は余分な仕事をしなければならない．そして，もし電源がその損失を補えば，系は遅かれ早かれ，最小のポテンシャルエネルギーを持った，安定な平衡状態に落ち着く．　（訳　こじま　ひでお）