Basic 数学. 1992. [illegible]. 5

ソ連科学誌・クウァントから

«Квант» для младших школьников

やさしい物理学 ⑪

小島　英夫（静岡大学）訳

気体における熱的過程 A.I. ブスディン, S.S. クロトフ (1986, No. 4, pp. 49〜53)

“力学”の分野から“分子論と熱現象”の分野へ移行するとき,対象とする体系を記述する方法が根本的に変ったことを,学生諸君は必ずしも十分明瞭には認識していない.

この世界に存在するすべての物体の内部では,それらの物体を構成する微小な粒子（原子と分子）が運動している．よく知られているように,それは熱運動と呼ばれ，その特徴は無秩序性(ランダムなこと)である．力学では，われわれは物体内部の粒子の熱運動を無視し,全体としての物体の運動を考察する．さらに，物体の運動を記述するとき,物体の大きさを無視することさえ可能な場合があり，そのとき物体は質点と見なされる．質点は力学の基本的な対象の一つである．

熱現象の物理学においては，力学とは反対に,莫大な数の粒子の無秩序な運動を取扱わねばならない．それらの粒子は気体，液体，固体を構成しており，その数はアヴォガドロ数 $N_A \sim 10^{23}$ mol^{-1} の程度である．熱現象の物理学における主な関心は,全体としての系の状態を記述する量の平均値——温度，圧力，密度など——を見出すことである．

授業で最も力を入れて扱われるのは理想気体であり，それはメンデレーエフ・クラペイロンの方程式（ボイル・シャルルの方程式）をみたす：

$$pV=(m/M)RT.$$

ここで，p—気体の圧力，V—気体の体積，m—気体の質量，M—モル質量，R—気体定数，T—気体の温度である．

熱的過程としては,任意の過程を考えることができる．それは例えば，気体の状態を特徴づける1個のパラメータを変化させる過程である．また例えば，一定量の気体の等温過程では，温度が一定に保たれ，圧力と体積は変化する（しかしそれらはボイル・マリオットの法則（ボイルの法則）に従い，$pV=$ 一定をみたす）．

等容過程および等圧過程において，気体のどんなパラメータがどのように変化するか，に注意せよ．

問題 1．閉じた容器内の気体が熱的過程を行い，V-T 図の上で図 1 のような円形の軌跡を描いた．気体の温度が最高および最低になる点はどこか？　体積と圧力についてはどうか？

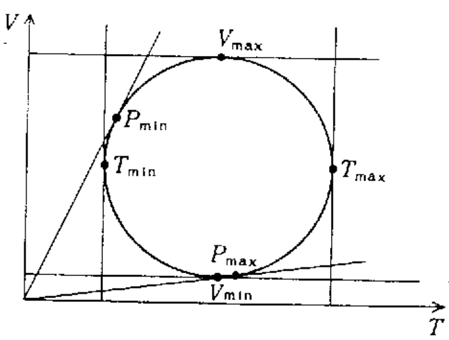


図1

体積と温度が最大および最小になる点は,図から容易に分かる．それは水平線（等容曲線）および鉛直線（等温曲線）と与えられた円との接点である．圧力についての問題の答を見つけるためには，T-V 図上に等圧曲線をひかねばならない．

等圧過程では，気体の体積は温度に正比例する：

$$V=(mR/Mp)T.$$

したがって，等圧曲線は座標の原点を通る直線であり，その勾配は圧力 p が大きいほど小さい．座標軸の原点から円に接する直線を引けばよいことは明らかである．下の接点が最大の圧力に対応し，上の接点が最小の圧力に対応する．

問題 2．p-V 図上に気体の膨張過程が描かれている．気体は圧力 p_0，体積 V_0 の状態 1 から，圧力 $p_0/2$，体積 $2V_0$ の状態 2 に変化する（図 2 a）．p-T および V-T 図上に，この過程に対応する曲線を描け．

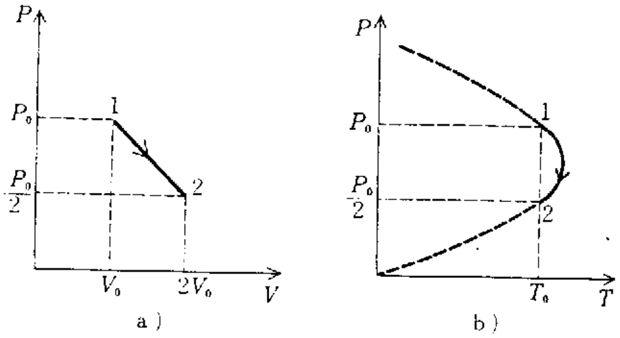


図 2

p-V 図上のこの過程は直線の一部であるから，圧力と体積は $p=\alpha V+\beta$ の関係にある；α と β は定数である．α と β を決めるために，状態 1 と 2 における p と V の値を用いる；

$$p_0=\alpha V_0+\beta,\quad p_0/2=2\alpha V_0+\beta.$$

これから，

$$\alpha=-p_0/2V_0,\quad \beta=(3/2)p_0.$$

したがって，変数 p と V でのこの熱的過程の方程式は次の形をもつ：

$$p=-(p_0/2V_0)V+(3/2)p_0.$$

メンデレーエフ・クラペイロンの方程式を $pV=AT$ ($A=mR/M=$ 定数) の形に書き，上の式を変数 p と T を用いて書き表すと，

$$\left(\frac{3}{2}p_0-p\right)p=\frac{Ap_0}{2V_0}T.$$

また変数 V と T を用いて書き表すと，

$$V\left(3-\frac{V}{V_0}\right)=\frac{2A}{p_0}T.$$

状態 1 と 2 における積 pV は同じだから，最初と最後の温度は等しく，$T_0=p_0V_0/A$ になる．変数 (p, T) および (V, T) で表わしたこの過程の曲線は放物線の一部であり，それぞれ図 2 b および 2 c に示されている．

問題 3．図 3 の熱的過程 1-2-3-4-1 において，気体の温度はどのように変化するか？

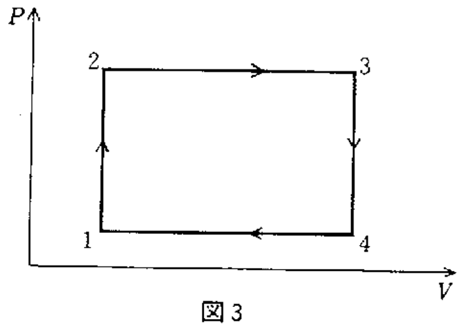


図 3

1-2 の部分では，圧力が一定体積の下で増加する．したがって（シャルルの法則により）温度も上昇する．2-3 の部分では，体積が一定圧力の下で増加するので，ここでも温度は上昇する（ゲイリュサックの法則）．同様な考察により，3-4 と 4-1 の部分では温度が下降することを結論できる．p-V 図上の対応する等温曲線を引くことによっても，答は簡単に得られる．

この問題を解くときに，気体の質量がいつも一定であることが仮定されている．次の問いに自分で答えてみよ：温度一定の条件の下で，熱的過程が p-V 図上で図 3 と同じ曲線を描くためには，気体の質量はどのように変化しなければならないか．

問題 4．図 4 には，同じ質量をもつ二つの異なる気体の等温曲線が描かれている．それらの気体の

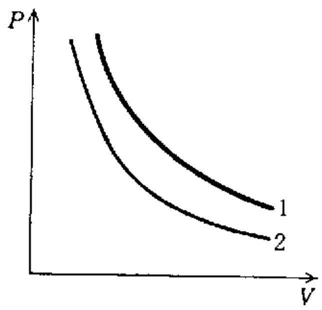


図 4

うな過程は可能か？

問題6．水平に置かれ，固定された円筒形の容器がある．それは質量 M のピストンを備え，1 mol の理想気体が入っている．気体が熱せられたとき，ピストンは等加速度で動かされ，速度 v を得た．気体に与えられた熱量を計算せよ．気体 1 mol の内部エネルギーは $U=CT$ である．容器とピストンの熱容量および外部圧力は無視してよい．

ピストンの加速に使われる唯一の力は，気体の圧力によるものである．ピストンが等加速度的に動くということは，気体の圧力が一定に保たれていることを意味する．その圧力を p_0 とすると，気体のした仕事は

$$A'=p_0\Delta V=Mv^2/2$$

1 モルの気体の状態方程式から，

$$p_0\Delta V=R\Delta T.$$

また，熱力学の第 1 法則から

$$Q=\Delta U+A'=C\Delta T+Mv^2/2$$

これらの式から，気体に与えられた熱量は

$$Q=\frac{Mv^2}{2}\left(\frac{C}{R}+1\right).$$

問題7．重いピストンを備え，鉛直に置かれた円筒容器に，温度 T の気体が入っており，その体積は V である．また，ピストンの質量は M，その面積は S である．気体に熱量 Q を与えたところ，気体の温度は ΔT°C 上昇した．気体の内部エネルギーの変化を計算せよ．大気圧を p_0，自由落下の加速度を g とし，摩擦は考えないことにする．

気体に与えられた熱量がわかっているから，熱力学の第 1 法則を用いて気体の内部エネルギーの変化を知るためには，気体になされた仕事 A を計算しなければならない．気体にはピストンが力 F をおよぼしており，その大きさはピストンの重力 Mg とピストンへの大気圧 p_0S の和に等しい．加熱された気体は膨張し，ピストンは上方へ，したがって外力の向きと反対に動くので，仕事 A は負で次式で与えられる：

$$A=-Fx=-(Mg+p_0S)x.$$

ここで，x はピストンの変位である．

加熱している間，力は変化しないので，気体の

圧力も一定である．それゆえ，ゲイリュサックの法則（$T/V=$ 一定）により，

$$V'/V=T'/T.$$

ここで，$V'=V+\varDelta V$ は加熱した後での気体の体積，$T'=T+\varDelta T$ はそのときの温度である．この式から体積変化 $\varDelta V$，したがって x が求められる：

$$\varDelta V=V\varDelta T/T,\quad x=\varDelta V/S=V\varDelta T/TS.$$

この x をつかって，気体になされた仕事が求まる：

$$A=-Fx=-(Mg+p_0S)V\varDelta T/TS.$$

内部エネルギーの変化は，次式で与えられる：

$$\varDelta U=Q+A=Q-(Mg+p_0S)V\varDelta T/TS.$$

問題 8．2原子分子の理想気体に，気体の圧力と体積の間に $p=\alpha V$ の関係がなりたつ熱的過程がなされた．この過程により膨張するときの気体のモル熱はいくらか？　この気体の定積モル熱は $C_V=(5/2)R$ である．

1 mol の理想気体にたいする過程を考える．体積が変らないとき仕事はなされないから，$Q=\varDelta U=C_V\varDelta T$．

したがって一定体積の場合の熱容量を知れば，気体の内部エネルギーの変化が直ちに分かる：

$$\varDelta U=(5/2)R\varDelta T.$$

つぎに，気体によってなされた仕事 A' を計算しよう．

気体が体積 V から $V+\varDelta V$ に膨張したとき，温度が T から $T+\varDelta T$ に変化したとする（$\varDelta V$ と $\varDelta T$ は小さいと考える）．このとき気体の圧力は p から $p+\varDelta p$ に増加し，$\varDelta p=\alpha\varDelta V$ である．$\varDelta V$ は小さいから，気体のした仕事は次式に等しいと考えられる：

$$A'=p\varDelta V.$$

1モルの気体にたいするメンデレーエフ・クラペイロンの方程式を温度 T と $T+\varDelta T$ とに対して書く：

$$pV=RT,\quad (p+\varDelta p)(V+\varDelta V)=R(T+\varDelta T).$$

第2の式から第1の式を引き，微小量 $\varDelta p\varDelta V$ を $V\varDelta p$ および $p\varDelta V$ にくらべて無視すると，次式を得る：

$$p\varDelta V+V\varDelta p=R\varDelta T.$$

$V=p/\alpha$，$\varDelta p=\alpha\varDelta V$ であるから，積 $V\varDelta p=(p/\alpha)(\alpha\varDelta V)=p\varDelta V$．したがって，

$$p\varDelta V+V\varDelta p=2p\varDelta V=R\varDelta T.$$

これから，気体のした仕事は，

$$A'=p\varDelta V=R\varDelta T/2.$$

それゆえ，気体に与えられた熱量は

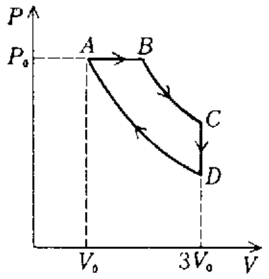
$$Q=\varDelta U+A'=\frac{5}{2}R\varDelta T+\frac{1}{2}R\varDelta T=3R\varDelta T.$$

これから，上記の過程におけるモル熱は

$$C=\frac{Q}{\varDelta T}=3R.$$

練習問題（正解は次回にのせる）

1．理想気体の状態が，図6に描いたように，サイクル $ABCDA$ に従って変化する．表には，サイクルの各点に対応する気体のパラメータがいくつか示されている．欠けているパラメータを決定し，表を完成せよ．



	P	V	T
A	P_0	V_0	T_0
B	P_0		$2T_0$
C		$3V_0$	$2T_0$
D		$3V_0$	T_0

図6

2．理想気体を用いた熱機関のシリンダー内で起る熱過程が，図3の $p-V$ 図に描かれている．$T_1=300$ K，$T_3=500$ K，$T_4=450$ K がわかっている．点2における温度は，点4における温度と何度違うか？

3．理想気体を用いた熱過程が，最初，圧力と体積が等式 $p\sqrt{V}=B$ で関係づけられる過程で始まる．気体の温度が T に達したとき，圧力と体積の関係が $p=D/V^2$ で与えられる，性質の違う過程にひき継がれる．定数 B と D および物質の量 ν がわかっているとき，上記の温度 T を求めよ．

4．教室の温度が10°C 上昇したとき，どれだけの空気が外に出るか．

5．$p=\alpha V^n$（α と n は定数）のなりたつ過程において，1 mol の1原子理想気体の熱容量はいくらか．

（訳　こじま　ひでお）

［訂正．本誌1992年1月号，サハロフ著"長さの素量は存在するか？"p. 9 右欄4行目．L_0 の式の中の c のべきは $-1/2$ でなく，$-3/2$ が正しい．以下，T_0，W_0，M_0 の式の中の c のべきは，それぞれ $-5/2$，$5/2$，$+1/2$ となります（訳注）］