Basic 数学
1991.4

«Квант» для младших школьников

ソ連科学誌・クワァントから

やさしい物理学 ——— ④

小島　英夫（静岡大学）訳

Japanese translation rights arranged with VAAP through
Japan Soviet Copyright Center, Tokyo.

1．合力——その見つけ方 (1988, No. 11-12, pp. 50-52)　A.R ジリベルマン

われわれは，"実用的な意味をもつ"問題を，それがどんなに複雑であるかをまったく意識せずに，解いていることがよくある．簡単な自動車でさえも，数千の部品を含んでおり，その一つ一つには多くの力がはたらいている．単にそれらを数え上げるだけでも複雑なのに，そんなに多くの方程式を書き表し，解くことは……．しかし，われわれは力の合成という概念を導入して，この障害をうまく切り抜ける．この事情を，より詳しく考えてみよう．

合力を決定するためには，物体に働いているすべての力を知り，そのベクトル和をとらねばならない（それがいつも簡単にできる訳ではないが，このことについてはすぐ後でふれる）．得られた合成ベクトルは，もとの力の系と同等である．

同等であるとは，一体どういうことか？　次のように考えてみよう．あなたの左手が500 Nの力で左に引っぱられ，また右手が同じ大きさの力で右に引っぱられている．それらの力の和はゼロであり，すなわち，力がまったく作用していないのと同じである．あなたはこの力に耐えられますか？（1 Nの力がどの位か考えて下さい）．

実際には，同等性はかなり狭い意味で用いられている．すべての力をその合力で置きかえるときには，物体の運動は変化しない筈であり，変形も，破壊も，その他のこれに類したことがないと仮定されている．

複雑な力がはたらくときには，どんな困難が起るのだろうか？　もし，すべての力が一点に作用する場合は問題がない．加法は容易にでき，合成ベクトル，すなわち合力がどちらに向いているかは明瞭である．しかし，力が，しばしば起るように種々の点に作用していたら？　このときは，力を移動させる必要が生ずる．そうするにはどうしたらよいか？　ここで，特別な物理量—力のモーメントが必要になる．

点 O に関する力 $\vec{F}$ のモーメントの大きさ M は

$$M=Fr\sin\alpha$$

に等しい(図1)．ここで，r は点 O から力の作用する点 A までの距離であり，α は $\vec{F}$ と $\overline{OA}$ のなす角度である．別の表現をすることもできる．力 $\vec{F}$ を，r に平行な成分 $\vec{F}_1$ と垂直な成分 $\vec{F}_2$ の二つに分ける．垂直成分 $\vec{F}_2$ だけが回転に寄与するモーメントを生ずる：

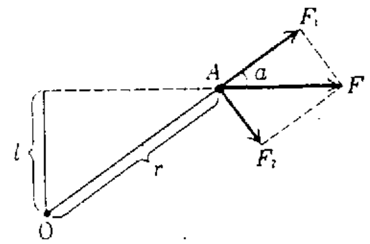

図1

$$M=F_2r,$$

たしかに，少し変形したこの式の方が簡単になっており，多くの場合この式を使うのが便利である．

力 $\vec{F}$ をその作用線に沿って（作用する方向に）移動しても，力のモーメントが変らないことは容易にわかるから，力をそのように移動させることは許される．（力の作用点を変えたとき，物体の変形は変化することに注意しなくてはならない．これは簡単な例で理解できる．一端を壁に固定したゴム紐を，まん中と他端とで，同じ力で引っぱることを考えよう．伸びは同じではない）．

次に合力を考えよう．種々の点に力がはたらいており，それらの力の作用線が一点で交るとする

と，この場合も簡単である．すべての力を，それぞれの作用線に沿ってその点に移動させ，それらを加え合せる．第一の場合と同様である．しかし，もし，力の作用線が一点で交わらないときには，合力を求める問題は単純ではなくなる．

特別な，簡単な場合として，力のベクトルが一つの面（力の系の面）内にあるときを考えよう．問題をいくつかのステップに分けて解くことを，試みてみよう．図2に示すように，力を二つずつ加え合せる．まず，力 $\vec{F}_1$ と $\vec{F}_2$ を加えて，ベクトル $\vec{R}_1$ を得る．次に，それをベクトル $\vec{F}_3$ と加える．合力 $\vec{R}$ は点 A にはたらく．

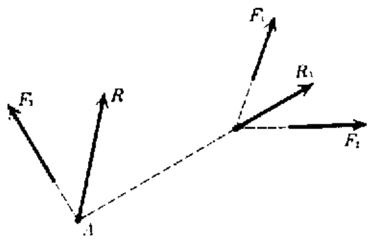

図2

このような方法は，すべての場合に有効だとは限らない．力のベクトルが平行な場合に，問題が生ずる．一つの例を考えよう．平行な力 $\vec{F}_1$ と $\vec{F}_2$ の合力を求めるとしよう（図3）．明らかに，合力の大きさ（絶対値）は F_1 と F_2 の和であるが，合力の作用する点はどこだろうか？ ここで簡単な考察が役に立つ．どのような作用点を選んだら，その点を通る軸に関する合力のモーメントがゼロになるだろうか．ところで，力をそれらの合力で置き換えても，モーメントは変らない筈である，したがって，元の力の系のモーメントの和が，ゼロになるような点を選ばなければならないことになる．今考えている例では，その点 O は次の条件から決められる：

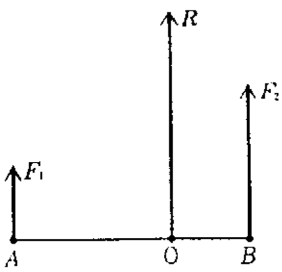

図3

$$F_1 \cdot AO = F_2 \cdot OB.$$

もし，$\vec{F}_1$ と $\vec{F}_2$ が違う側にあるときには，点 O は AB を力の比に分つ，大きい力に近い点である（自分で考えてみて欲しい）．

これで，平行な力の合力を見出す必要のある問題を，あなたは確実に解くことができる．一つの物体の種々の部分に作用する重力は平行であると考えることができる．物体の重心は，ちょうどこれらの力の合力の作用する点である．

例えば，物体の重心を通る軸に固定された物体が平衡状態にある理由は，これでわかる．

平行な力の系の，重要な特別の場合として，合力が存在しない場合がある．そのような系は偶力と呼ばれる（図4）．偶力の作用点を見出す試みは成功しなかった．そういう点を見出すことはできなかった．偶力には一つの注目すべき性質がある：任意の回転軸に関するそのモーメントは同一である．（このことを確かめよ）．この性質は，和がゼロになる任意の力の系に共通である（偶力はそのような系の特別な場合である）．

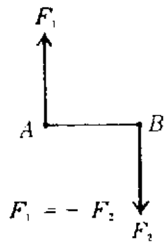

図4

しかし，そのような力の系は，物体の平衡条件（静力学）を考えるとき，われわれに興味がある．一つの条件は，力の和がゼロになることである．このことから，重要な結論が得られる：すなわち，力のモーメントの方程式，すなわち第二の平衡条件である．モーメントの和がゼロになることが，この場合には，任意の点に関して，特に物体の内部にない点に関して，成り立つ．その点は，得られる方程式の簡単さを考えて選ぶことができる（例えば，いくつかの力の作用線の交差点に選ぶと好都合である）．特に，われわれが取扱いたくない力の交差点に．

2．質量中心とはどんなものか？ (1988, No. 3, pp. 39-41) A.I. チェルノウザン

もし，あなたが斜めに小石を投げ上げれば，それが放物線を描くことはよく知られている．しかし，長い棒を投げたとすると，それでも棒は同じように運動するだろうか？　たしかに，棒の各点は異なる運動をしてかなり複雑な軌道を描くが，棒は全体としては小石の運動と似た運動をする：上昇，最高点，そして降下．そればかりでなく，空気の抵抗を無視すれば，棒のある一点の運動は，放物線にそって自由飛行する小石の運動とまったく同一である．この点が，棒の**質量中心** cm である．

質量中心は，任意の物体に，さらには任意の物

体の系に存在する．それはいくつかの顕著な性質をもっており，そのうちのいくつかについて，この論文で説明する．

質量中心の位置を決めることから始めよう．質量 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ をもつ質点の系を考える．それらの座標を知ると，その“最も重要な点”の座標はどうなるだろうか？

答は次のようになる：

$$x_{\mathrm{cm}}=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_nx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n} \tag{1}$$

座標 y_{cm} および z_{cm} についても同様である．重心の座標が，なぜこの形に表されるのかは，後で物体の力学的性質を考察するときに明かになる．当面は(1)式をつかって，質量中心に関連したいくつかの問題を考察しよう．

a）二つの質点 m_1 と m_2 の場合には，x_{cm} にたいする表式は明瞭な意味をもっている：質量中心は2点の間にあり，質量の大きい方に近い（図1）；各点までの距離の比は質量の逆比である（この事実を確かめよ）．明らかに，一般に質量中心は系の点の間にあり，空間的な質量分布を反映している．

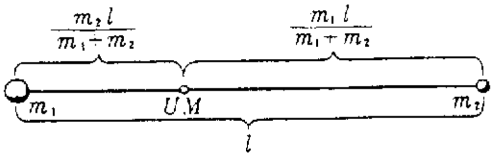

図1

b）すべての質点は，質量中心の位置を決めるとき，完全に同等に“寄与”する．すなわち，もし質量分布がある点に関して対象であれば，その点は質量中心である．例えば，一様な球の質量中心はその中心と一致する（円筒，立方体などではどうなるだろうか）．

c）最後に，考えている系の一部をとり去り，その代りにその部分の全質量をその質量中心に集中しても，系の質量中心の位置は変らない．例えば，針金でできた三角形の質量中心は，各辺の中心にあり，その辺の質量に等しい質量をもつ3個の質点の質量中心と一致する．

ここで，最も重要な問題——質量中心の物理的性質の探究に移ろう．

短い時間 Δt の間に，各点が $\vec{s}_1, \vec{s}_2, \cdots, \vec{s}_n$ の変位をしたとしよう．すると(1)式からわかるように，質量中心の変位は次式で与えられる：

$$\vec{s}_{\mathrm{cm}}=\frac{m_1\vec{s}_1+m_2\vec{s}_2+\cdots+m_n\vec{s}_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

（変位ベクトルの座標軸への射影は，その軸の方向の変位に等しいことに注意）．変位を Δt で割ると，質量中心の速度が得られる：

$$\vec{v}_{\mathrm{cm}}=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\cdots+m_n\vec{v}_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n} \tag{2}$$

分子には，系の全運動量 $\vec{p}$ 自身が現れていることに注意しよう．それゆえ，(2)式は次の形に書くことができる：

$$\vec{p}=(m_1+m_2+\cdots+m_n)\vec{v}_{\mathrm{cm}} \tag{3}$$

このようにして，第一の性質が得られる：もし系の全質量が質量中心に集中したとすると，その点の運動量は系の全運動量に等しい．これから何がわかるのか？　例えば，閉じた系の運動量は運動の定数である（保存される）ことがわかる．すなわち，もし系が閉じていると，系の質量中心の速度 $\vec{v}_{\mathrm{cm}}$ は定数である．

例題を考えよう．長さ l の一様な細い棒が，なめらかな床の上に立っている（図2）．手を放した後で，棒は倒れて横になった．倒れた瞬間に棒の下端がどれだけ動いたかを，どのように知ることができるか？　重力場にある棒は閉じた系とは考えられない．しかし，棒には鉛直方向の力だけしかはたらかないから，運動量の水平方向の斜影は変化せず，この場合にはゼロに等しい．すなわち，質量中心は水平方向には変位せず，棒の中心は棒が立っていた位置に落ち，棒の下端は $l/2$ だけずれる．

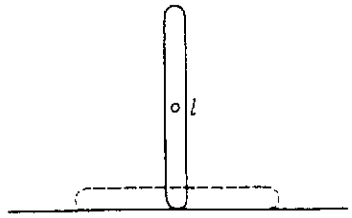

図2

質量中心の性質の考察を続けよう．質量 m_1 と m_2 の二つの質点の系を考える．いま，この系が閉じていない，すなわち各物体には内力とともに外力がはたらいているとしよう．ニュートンの第2法則をつかって，Δt 時間後の各点の運動量の変化を書き表す：

$$m_1\Delta\vec{v}_1=(\vec{F}_1+\vec{F}_{12})\Delta t,$$
$$m_2\Delta\vec{v}_2=(\vec{F}_2+\vec{F}_{21})\Delta t,$$

ここで $\vec{F}_1$ と $\vec{F}_2$ は外力で，$\vec{F}_{12}$ は第2の点から第1の点にはたらく力，$\vec{F}_{21}$ はその反対にはたら

く力である．ニュートンの第3法則により $\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}$ であるから，全系の運動量の変化は次式で与えられる：

$$\Delta\vec{p}=m_1\Delta\vec{v}_1+m_2\Delta\vec{v}_2=(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\Delta t$$

系の運動量は外力の作用の下でのみ変化する．他方で，(3)式から次の式が得られる：

$$\Delta\vec{p}=(m_1+m_2)\Delta\vec{v}_{cm}$$

これらのことから，質量中心にたいして，ニュートンの第2法則に似た関係が得られる：

$$(m_1+m_2)\Delta\vec{v}_{cm}=(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\Delta t$$

この式は，より見慣れた形に書くことができる，

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2=(m_1+m_2)\vec{a}_{cm} \qquad (4)$$

これは最も重要な関係である：質量中心は，系の全質量がそこに集中し，そこに全外力がはたいているように運動する．外力だけに注意を向ければよい．系の内力は，一般に質量中心の運動には影響しない．これが，多くの場合に質量中心の運動が非常に簡単になる理由である．

質量中心のこの性質は，多くの応用例をもつ．例えば斜めに投げ上げられた棒の中心が，小石と同じように放物線を描く理由を，あなたは理解できるだろう（この例は，この項の最初に取上げたものである）．空気の抵抗がないときには，外力は $m\vec{g}$ に等しく，したがって質量中心の加速度は，小石の加速度と同じく $\vec{g}$ であり，これは棒の回転が起るかどうかには関係しない．

次の例を考えよう．クレーンが重いプレートを建築現場へ持ち上げる．このプレートを回転させるために，二人の労働者が点 A と B を，大きさの等しい力で押している（図3）．プレートはどの点のまわりに回転しはじめるだろうか？　あなた方の多くは，直ちに答えるに違いない：点 A と B の中間にある点 C のまわりに回転するはずだ．慌ててはいけない！　正しい答は，プレートの質量中心 O のまわりに回転する，である．(4)式を見ていただきたい．外力の和はゼロであるから，したがって質量中心の加速度はゼロである．質量中心は静止している．

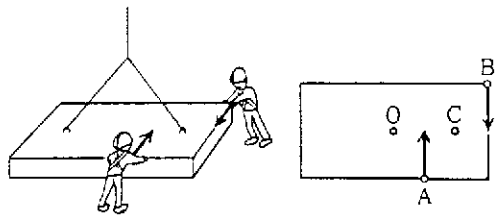

図3

最後に，質量中心の一つの"便利さ"についてつけ加えよう．(3)式からわかるように，質量中心に結合した基準系では，物体の系の全運動量はゼロに等しい．明らかに，そのような座標系では運動がより単純に見える一系は全体として静止しているのだから．系が閉じているときは，この方法を使うのに特に適している．そのとき，質量中心の加速度はゼロである（(4)式を見よ）から，それに結合した基準系は慣性系である．例えば，そのような座標系における，二個の弾性球の正面衝突は，簡単に考察することができ，ただちに答が得られる：衝突の後で，二つの球は衝突前に持っていたのと同じ速さで，互いに遠ざかっていく．どうしてそうなるのかを，考えてみていただきたい．

3．極めて起し易い一つの誤りについて (1988, No. 1, pp. 36-37) L.V. タラソフ

物理学の授業における次のようなシーンを考えてみよう．

先生．水平面にたいして，ある角度 θ で投げ上げられた石は，放物線軌道をえがきます（空気の抵抗は無視する）（図1）．ある時刻（t）に，放物線上の一点に石があるとき，その石にはどんな力がはたらいていますか？

生徒．まず，石には重力が作用しています．（しばらくの沈黙）．その他に，石には軌道の切線の方向に，投げたときの力がはたらいています．

先生．よく知られているように，力は物体の相互作用の尺度です．重力は石にはたらく地球の引力によって生じます，これは明らかです．ところで，投げる力については，どんな物体が石にはたらきかけていますか？

生徒．石は手で投げられたとしましょう．すると，手が石を投げる力を生じるのです．

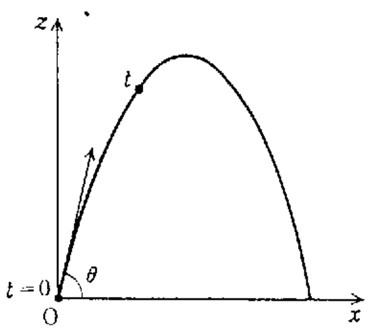

図1

先生．しかし，石と手の間の相互作用は，石が飛んでいる時には存在しないのではないですか．速度はエネルギーを貯えることができる：しかし，力を貯えることはできない．相互作用はすでになく，それによる力もその時には消えているのですから．

生徒．（少し呆然として）とすると，飛んでいる石には，重力だけしかはたらいていないのですか？

先生．正しくその通りです．もし，石と空気の相互作用を考慮しなくてよければですね．

ここに引用したシーンは，非常に典型的なものである．それは，高等学校においてばかりではない．毎日，多くの受験生が，課せられた問題にたいして誤った答をしている．ちょうど，われわれの生徒が犯したような同じ間違いは，力学の試験を受ける大学生によっても，頻繁に犯される．

上に考えた間違いの根強さと広汎さは，物理学の理解の浅さだけでは説明できない．ここには，明らかに，心理的な性質の原因がある．まず第一に，日常的な状況のレベルでは，物体の運動を持続するためには，何らかの力を作用させることが必要なことを，われわれは知っている．その際に，力は単にまさつ力とつり合うためにだけ必要なことを忘れている．第二に，われわれは，十分速いリズムで生きており，そしてしばしば，ああ何としばしば，手遅れにならないうちに結果を得ることを望んでいる．その時，われわれは，慣性，不動性に注意することを単純に忘れてしまう．

考えている時刻に，力はどんな向きにはたらいているのか，その瞬間に石はどの向きへ飛ばねばならないのか．力の向きが変ったとき，その瞬間に運動の向きはどうならねばならないのか？もし石に重力だけがはたらいているとすると，石は下方へ動くはずである．しかし，石は下に向っては落下しない，つまり重力のほかに他の力がはたらいているのだ．ほぼこの様な考えが，われわれの頭の中に浮んで，まさしく上記の誤りを起すのに違いない．

われわれは，慣性と，動くことを欲しない不動性とを同一視するこの誤りを指摘したいと思う．だが物理学の立場に立って，仮に慣性が消滅してしまった世界を見ていると仮定しよう．そのような世界で物体が運動するためには，いつでもその物体に力がはたらいていなければならないだろう．作用が止むと，そこで運動も止む．力が右向きであれば，物体は右に動く．力の向きが反対向きになると，その瞬間に物体は反対向きに動いている．ここでは，すべてが与えられた時刻だけで（その瞬間に作用している力だけで）決定され，瞬時の作用，瞬時の指示だけが重要である．ここでは，過去に関する“記憶”はなく，過去は現在に少しも影響を与えない．慣性のない世界―それは原因―結果の関係（因果関係）のない世界である．

ところで，われわれの小石に話を戻そう．それが投げられた時，たしかに小石は何らかの力が作用した．小石が飛んでいる時，それは過去に関して“記憶”を持っている：その運動の性格は（特に，飛行の高さと距離は），重力だけでなく，以前に小石に作用した力にも依存する．それゆえ，小石は下方へ落下するのでなく，楕円軌道を描くのである．厳密な科学用語で言えば，考えている瞬間の小石の運動は，その瞬間に作用している力と初期条件―飛行の始めの瞬間に小石の持っていた速度の向きと大きさ―によって決まる．この型の問題が，ふつう次のような言葉で始まるのには理由がある：“ある速さで水平面に対してある角度で投げられた物体は…”．これらの初期条件そのものは，正しく過去における力の作用の結果を表している．初期条件を通じて，過去は現在に影響する．

明らかに，物体に作用する力の変化は物体の運動の変化をもたらす．しかし，物体の運動の変化は，前に物体がどのように運動していたかを考慮することによって決められる，ことが重要である．力は物体の速度を直接決めるのではなく，加速度，すなわち速度の変化を決めるのである．次の結果が得られる：よく知られたニュートンの第二法則は，―ここで，物体の慣性の尺度である質量が最初に現れたのであるが―力学における因果関係を表す基本法則である．

水平面に対して，ある角度で投げられた小石の運動を考察することによって，このように，真理に達する結論が得られたのである．

（訳　こじま　ひでお）