Basic数学. 1997. No.5.

やさしい物理学――――40

小島　英夫（静岡大学）訳

自然対数　B. オルドリッジ[1]（クヴァント 1993, No. 8, 15-19pp）

2.71828……という数値に，このような〈自然なもの〉があるとは面白いではありませんか？

あなた方は対数を知っているでしょう―この言葉は，任意の数 n のべき指数を表すのに用いられる．べきの底を，例えば数値10にとり，n を $n=10^x$ とおく；すると，数 x は次の形に表される：$x=\log_{10} n$（常用対数にたいしては，記号 $\lg n$ がふつうに用いられる）．対数記法で数を表すとき最も興味あるのは，それで計算が著しく簡単になることである．

偉大な数学者ラプラス（1749-1827）は，次のように語っている：「対数の発見は，それまで何ヵ月もかかっていた計算をわずか数日ですませ，今では計算者は二倍の報酬をえている」（当時，職業的な〈計算者〉がおり，多量の計算を手でおこなっていた）．次のは，もっとも簡単な例である：二つの数を〈対数的に〉掛けるためには，べき指数を単純に加えればよい．5673 を 1347 に掛けたら，答えはいくつか？　常用対数表を引いて，$\lg 5673=3.75381$ と $\lg 1347=3.12937$ を得る．この積の問題は $10^{3.75381}$ を $10^{3.12937}$ に掛ける問題に帰する．べき指数の和をとって $10^{6.88318}$ を得る．再び対数表にもどって $\lg n=6.88318$ であることから，近似的に $n=7.6415\times10^6=7641500$ を得る．もし，二つの数を正確に掛け算すると 7641531 が得られる．ここであなたがたが気付いたように，対数表をつかうと一定の誤差が生ずることは避けられない．これは対数表の数値が一定の精度で与えられているためである（小数点以下の桁数が有限である）．しかし，多くの応用問題にたいしては，この精度は充分である．

たしかに，上の例では計算がそれほど単純化されたようには見えないだろうが，複雑な式の計算では，とくに根を含む場合には，対数（とその計算規則）を使うことによって，著しい単純化が生じた．私が「生じた」と書いた理由は，今日ではポケコンを使うことによって，以前は対数を使っても数時間からまる一日もかかった計算が数分の1秒でできるようになったからである．しかし，今日でも対数の別の重要な性質が，科学と技術への応用に寄与している．

底が10の対数（常用対数）は，計算に十進法を使うことと関係している．しかし，実在世界ではすべての対数関係は違う底をもっている．それでそのような対数は実在対数，ある

(1)　オルドリッジ(B.D. Oldridge)-科学教師連盟 (National Science Teachers Association, USA)執行委員長で，ロシア―アメリカ協同編集雑誌「量子」(Quantum) の組織委員および編集委員の一人である．この論文は，アメリカの学生のために書かれ，1990年に同誌に掲載された．

いは自然対数と呼ばれる．常用対数と違って，底は無理数である．すると，そのような対数にどんな〈自然なもの〉があるのだろうか？

その数は記号 e で表され，ふつう近似的な有理数 2.71828 ……が代用される．私は高校や大学で自然対数を学び，数学的手段として数値 e を使って計算したけれども，実際にそれがどこからでてきたのかを考えたことはなかった．数 e の計算は，多くの数学の論文にあるだろうが，それはいつでも抽象的に与えられてきた．私にはそれが不満だった．

結局，大学を卒業して何年もたってから，数 e を実在世界から〈取り出す〉方法を考えついた．そのためには，放射性崩壊，あるいは電流回路の中のコンデンサーの放電，あるいは統計熱力学におけるエントロピーの抽象理論をつかうことができる．私は物理学者ではあるが，ここでは生物現象をつかって数 e を考察することにしよう．

バクテリアの増殖の生物学的側面

私は，特別な培養基のなかのバクテリア〈スタヒロコッカ〉(Staphylococcum 110 agar)の増殖について勉強した．その過程はおよそ次のように起こる．細胞は，最初はそのサイズが大きくなり，ある時間が経過するとその中に隔壁ができ，最後に増殖する細胞は二つの全く同じ娘細胞に分裂する．親細胞のすべての要素は二つの娘細胞に等質に分配される．今度は，また各娘細胞のサイズが大きくなりはじめ，新しい分裂サイクルを開始する．細胞分裂毎に，バクテリアの数は二倍になる．この過程は２元横分裂と名付けられている．

増殖時間，すなわちバクテリアの数が二倍になるのに必要な時間は，バクテリアの種類とそこで増殖がおこなわれる培養基によって20分から数日にわたる．一つの試料の平均増殖時間は，増殖の数サイクルを観察することによって決定できる．(そのためには顕微鏡が必要だが，私の手元にはそれがないので，適当な文献から得られた数値を使うことにする．)

バクテリアは，一定の時間が経過した後に初めて，指数関数的に（20分毎に２倍に）増殖するように見える．最初は，バクテリアは培養基に適応する必要がある（ゆっくりと増殖する期間）．次に，増殖は指数関数的になる．培養素がすべて消費されると，定常状態が始まり，最後にバクテリアは死滅し始め，この過程を表す曲線は急激に低下する．以下の考察では，指数関数的に増殖する期間に限ることにする．

最初の娘細胞がつくられた瞬間に考察を始めると，それらの細胞は一定の時間のあいだは同期的に増殖するが，それからリズムは狂い出す．しかし，勝手に取り出したバクテリア群を考察すると，その中には分裂直前のもの，サイズが大きくなり始める段階のもの，成長段階にあるものなどが混在することに気付くだろう．つまり，すべてのバクテリアは増殖の異なる位相にあり，任意に取り出したバクテリアは勝手な時間に分裂を始めるだろう．バクテリアの数が充分に多ければ，細胞分裂は近似的にほぼ連続的に起こると考えてよい．

バクテリア増殖の数学的側面

一定の時間がたつと，それぞれのバクテリアから２個のバクテリアが生ずる．こんどは，２個の新しいバクテリアが成長を始め，二つに分裂し，この過程は新しいバクテリアにとって充分な空間と培養がある限り続く．

最初5000個のバクテリアがあり，増殖時間が20分だったとすると，２時間後のバクテリア数は幾つだろうか？　８時に観察を始めたとする．8:20には10,000個，8:40には20,000個，9:00には40,000個，9:20には80,000個，9:40には160,000個，そして２時間後の10:00には320,000個になる．さらに２時間後には何個になるだろうか？

次に私がやりたいことは，時間 t とバクテリアの数 N の間の関数関係(N_0 個のバクテリ

アが時間 t の後に N 個になる）を表す方程式を導くことである.（最初のバクテリアの数が多く，その成長の位相はランダムであって，細胞分裂の過程は確率的かつ連続的であると考えてよいとしよう.）時間 t を n 個の微小時間間隔に分割し，その間隔を Δt と書くことにする（n は非常に大きな数である.）：

$$\Delta t = t/n.$$

時間 Δt の間に ΔN 個の細胞が分裂すると考える. $\Delta t = 0.01$ 秒と仮定すると，その間に一定の数の分裂が起こる. この時間間隔が，例えば 0.02 あるいは 0.03 秒になったとすれば，分裂する細胞の数は 2 倍，あるいは 3 倍になるだろう（訳注：n が非常に大きな数であることに注意）. 時間間隔の最初に 2 倍の数の細胞があれば，その間隔の終わりまでに分裂する細胞の数は 2 倍になるだろう. 換言すれば，Δt 時間に分裂する細胞の数 ΔN は時間間隔と最初にあった細胞の数 N とに比例する. この依存性は，数学的に次の比例関係で表される：

$$\Delta N \sim N\Delta t.$$

この比例関係は，例えば，Δt あるいは N が 2 倍になると，分裂する細胞の数も 2 倍になり，この余因数のいずれかが半分になると，分裂する細胞の数も半分になることを表している.

比例係数 k を使うと，この比例関係は等式の形に書き換えられる：

$$\Delta N = kN\Delta t.$$

すでに指摘したように，数 n が非常に大きければ，時間間隔 Δt は非常に小さくなる. それぞれの時間間隔にたいして，新しく増えるバクテリアの数 ΔN を決める方程式を書くことができる. 最初の時間間隔にたいしては

$$\Delta N = kN_0\Delta t.$$

この式で，N_0 は最初の時間間隔の初めにあったバクテリアの数，すなわちバクテリア数の初期値である.

したがって，最初の時間間隔の終わりでのバクテリアの数は，次のように書き表せる：

$$N_1 = N_0 + kN_0\Delta t = N_0(1 + k\Delta t).$$

次に，第二の時間間隔の終わりにおけるバクテリアの数を計算しよう. この時間間隔におけるバクテリアの増加数 ΔN は最初のバクテリア数 N_1 と時間間隔に比例する. 再び比例係数 k を使って，第二の時間間隔の間に生ずるバクテリア数の増加を表す式を得る：

$$\Delta N = kN_1\Delta t.$$

明らかに，第二の時間間隔の終わりでのバクテリアの総数は，その時間間隔の初めの数に増加数を加えたものである：

$$N_2 = N_1 + kN_1\Delta t = N_1(1 + k\Delta t) \qquad (1)$$

$$= N_0(1 + k\Delta t)(1 + k\Delta t) = N_0(1 + k\Delta t)^2. \qquad (2)$$

すぐに，私の次の予定が，第三の時間間隔の終わりにおけるバクテリアの数の計算であることに気がつくだろう. その最初のバクテリア数は N_2 であるから，バクテリアの増加数は次のように表せる：

$$\Delta N = kN_2\Delta t.$$

今までと同様に，第三の時間間隔の終わりでのバクテリアの数は $N_2 + \Delta N$ である. したがって，

$$N_3 = N_2 + kN_2\Delta t = \cdots = N_0(1 + k\Delta t)^3.$$

この計算を通じて，あなたがたは問題の解法が理解できたことだろうが，たぶん，それにはかなりうんざりしているのではないだろうか. しかし，ここで結果を一般化する段階に達しており，それはいつでも快適なものである.

各時間間隔の終わりにおけるバクテリア数の計算を続けたとすると，その数はその時間間隔のはじめにおけるバクテリア数に $(1 + k\Delta t)$ を掛けたものになることが分かる. 第一の時間間隔からはじめて，各時間間隔での増加数を計算していくと最後に n 番目の時間間隔の終わりにおけるバクテリア数を得る：

$$N_n = N_0(1 + k\Delta t)^n.$$

N_n は時間 t の後に得られるバクテリアの総数である. 時間 t をわれわれは長さ Δt の n 個の区間に分割した. したがって，$t = n\Delta t$ あるいは $\Delta t = t/n$.（何度も繰り返して退屈さ

せたことをお詫びしたいが，私の目的は，普通には省略される論理の連鎖の全体を提示することにあったので，ここで終わりにする.）それゆえ，Δt に上の関係を代入して次の式を得る：

$$N_n=N_0(1+kt/n)^n.$$

表式 $(1+kt/n)^n$ は2項級数に展開できる：

$$\left(1+\frac{kt}{n}\right)^n=1+n\frac{kt}{n}+n(n-1)\frac{\left(\frac{kt}{n}\right)^2}{2!}+n(n-1)(n-2)\frac{\left(\frac{kt}{n}\right)^3}{3!}+\cdots.$$

もし間隔 Δt が充分小さいとすれば，t は莫大な数の時間間隔からなる．そのような2項級数の和を n が非常に大きい場合に計算しよう．n が充分に大きければ，展開の各項は簡単になる．n を含む全ての項は n のべきに，例えば $n(n-1)(n-2)$ は n^3 になる．それらのべきは (kt/n) の分母の n のべきと次数が一致するので，ちょうど打ち消し合う．このようにして，2項級数の極値はつぎのようになる：

$$1+kt+\frac{(kt)^2}{2!}+\frac{(kt)^3}{3!}+\cdots+\frac{(kt)^m}{m!}+\cdots.$$

それゆえ，時間 t の後に得られるバクテリアの数は，次の形に表される：

$$N_n=N_0\left(1+kt+\frac{(kt)^2}{2!}+\frac{(kt)^3}{3!}+\cdots+\frac{(kt)^m}{m!}+\cdots\right).$$

$kt=1$ とおいて，上の級数に代入すると，例えば $m=8$ までとったとき，次の級数を得る：

$1+1+1/2+1/6+1/24+1/120+1/720+1/5040+1/40320.$

あるいは小数に直して

$1+1+0.5+0.1666666667+0\iota04166666667+0.0083333333+0.0013888889+0.0001984127+0.0000248016.$

これらの数をすべて加えると，2.71828……になる．*Eureka*!（多分より正確には《*dejavu*》－《これはどこかで見たことがあるぞ？》）

小さな，有用な，非周期的定数

最も興味があるのは $kt=2$ とおいたとき，この数列の和は正確に $(2.71828\cdots\cdots)^2$ となることである．もし $kt=3$ とすると，この数列の和は 2.71828……の3乗に等しく，以下同様である．この無限非周期小数は，べきの底として求められたのだが，有理数ではない．この数を文字〈e〉で表すことにしよう．（これは美しく，かつ不合理ではないだろうか？）この数の値を（16桁まで）書いておこう－2.718281828459045．すると，時間 t の後のバクテリア数を表す式は，非常に簡単になる：

$$N=N_0e^{kt}.$$

それでは，数 e を底とする自然対数を決定しよう．（10を底とした対数を lg で表したように，e を底とする対数を ln で表す.）われわれの得た，バクテリアの増殖を表す方程式を対数の形に書くと，

$$kt=\ln(N/N_0).$$

あるいは，時間 t にたいして

$$t=\left(\frac{1}{k}\right)\ln\left(\frac{N}{N_0}\right).$$

最後の式は，最初のバクテリア数が N_0 のとき N 個のバクテリアを得るまでの時間を表している．この関係式を使うためには，自然対数の表が必要で，それは教科書に掲載されており，あるいはほとんどすべてのポケコンは自然対数を計算することができる．

もちろん，計算がすべてうまくいき，自然対数の底－数 2.71828……と実在世界との関係を説明できたとき，私は非常に満足した．しかし，自分に納得のいかないことを解決しようとしなかったならば，なにも問題にならなかったろう．あなたがたも，いつか，なにかの意味が分からなくなったときには，それを恐れたり，恥じたりすることなく，例えそれがつまらないものに見えようとも，それを究明するために努力してもらいたい．

（訳　こじま　ひでお）