«Квант» для младших школьников

ソ連科学誌・クヴァントから

やさしい物理学 ㊳

小島　英夫（静岡大学）訳

数学とは何だろう　I. ヤグロム（1993, No. 9, pp. 3 8）

全ての科学は，良く知られているように，三つの大きなグループに分けられる，：数理科学—自然科学—人文科学．あるいは故アカデミー会員 L.D. ランダウが言ったように〈超自然科学—自然科学—不自然科学〉．高名な物理学者の語ったこの簡潔な冗談については，以下でもう一度触れるだろう．

自然科学—物理学，化学，天文学，生物学，医学……は，われわれを取り巻く世界を研究する；人文科学—歴史学，文学，言語学，法律学，社会学……は，現実に存在し，実験的にも研究される，人間的な組織を研究する；数学は自分自身を研究する．この最も基本的な観点から見て，無条件に言えることは，数学と〈数学以外〉との差は，自然科学と人文科学の間の差よりはるかに大きい．さらに，最近の十数年の間に，自然科学と〈非自然科学〉との間の境界は次第に消えつつあり，現在では知の領域の間に区別を設けて，自然科学と人文科学とに分類することは，簡単には出来なくなりつつある．

例えば現在，経済学とはなにを意味するのだろうか？　その歴史と目的とから，経済学が人文科学に属することは疑問の余地がない；しかし，そこで用いられる方法と現代経済学の〈典型的な問題〉の設定は自然科学のものであり，経済学を物理学や地理学に近づけている．それに対して，心理学はこれまで医学の一分野と考えられ，自然科学に分類されてきた．しかし今日では，群集心理学，社会心理学，心理言語学（心理学と言語学の境界領域）などの発展によって，心理学を人文科学のリストに載せることが可能である．

自然科学と人文科学の〈癒着〉は後者の数学化を加速し，そこでは，演繹法と数学的モデルと，初等代数学からトポロジーにわたる種々の多くの数学とが使われるようになった．昔の人文科学では特に，推論に数学的手段と演繹法を使わない点が天文学や物理学と違っていた．ついでに注意すると，前世紀における数学と人文科学を分けるものとして強調されていたのは，次の様なことだった：数学（〈説得力の有る〉）は，帰納法や純粋に記述的な推論をいつでも無視することができる．有名な J. ポイアの本《数学と真理紛いの推論》には，次のように書かれている：〈本当の数学〉は薄暗い〈台所〉を開く神聖な行為であり，そこには俗人が立ち入るべきではない．（私は，故 A. Ya. ヒンチン教授が解析学の講義で，学生たちに熱っぽく語りかけたのを覚えている：証明の唯一の条件は形式的な完全さである；そこで数学者は，何等かの完全に自由な（動機のない）《次の関数を考察しよう……〉のような文章で推論を始める権利をもつ；そして，この関数がどこから得られたのかという問題には，答える必要がない．）

今はしかし，事情が変わってしまった：数学と人文科学の距離が縮まったために，ある

種の〈人文化された〉数学が生まれ，人文科学特有のアプローチと観点とが生じた．いくつかの先端的な領域では，次のように言うことができる；現代の典型的な特徴の一つは，数学的に思考する人文科学者であるばかりでなく，人文科学的に思考する数学者である．

人文科学と自然科学（あるいは更に数学的科学）の間の差は，これまで非常に大きかった．例えば，フランス語や英語では〈科学〉(science)という言葉には，文学や歴史学は含まれていなかった．プラトンやアリストテレスの時代から，人文科学には科学の固有の指標であると考えられてきた演繹的な論理すなわち〈科学性〉が欠けていることと，真理の基準に，ある種のあいまいさ（たとえば物理学や数学と較べての）があることとが，L. D. ランダウをして，法律学や歴史学は〈不自然科学〉であるという，〈現代の科学者〉(scientist) に特徴的な思い上がった定義をさせることになったのである．

現在，状況は根本的に変化している．数学的言語学（さらに数学的芸術学あるいは数学的文芸学)，数学的心理学あるいは数学的法律学，さらに(数理経済学は勿論のこと)〈混合人文・数学〉が人文科学の一分科として確立しており，大学の文学部，法学部あるいは経済学部で，以前から技術者の卵に教えられてきた〈高等数学〉を主体とする広範な数学が開講されている．この様な新しい傾向と関連して，近い将来フランス語の science は，数学，自然科学に加えて人文科学をも含むことになるだろう．L. D. ランダウが生きていたとしても，彼は冗談にも人文科学を〈不自然〉などと言うことはないだろう．

自然科学と人文科学は，現実に存在する対象を取り扱う—そして真理の唯一の基準は，例えば物理学では，その結論が観測と，実験結果と一致することである；したがって，例えば証拠の不確実さを非難した当のランダウは，こう言うこともできる《僕のより，君の結論が実験とよく合うという証拠を示すことができますか？》．こう言うわけで，物理学的推論は，それを使って得られた結論が実際に観測された事実と一致するとき正しく，実験と矛盾するとき正しくない，と言える．それに反して，数学は純粋に思弁的に構成される：数学は人間の頭脳以外に〈実験室〉を持たない．数学的推論の真理の基準は論理的無撞着性であり，推論の各段階において数学者自身が選んだ数学的論理，数理科学の一分科に対応する数学的論理規則—を満たすことである．その際にわれわれが選ぶのは，唯一の論理規則の集合ではなく，先験的に可能な多くの種々の集合の中からの一つである．また，一人の学者がある数学的推論を選んでも，他の学者はそれを選ぶ必要はなく，この相対する立場はどちらかの学者が正しく，他方が間違っているというものではない：そうではなくて，二人とも正しく，ただ二人は違う〈競技規則〉を選んだだけであり，したがって二つの異なる〈数学〉ができるだけである．

昔の幾何学の教科書には，次の様な文章がある：〈公理の妥当性は長年にわたる人々の経験によって保証されている．〉この命題はアリストテレスの考え方を反映している．しかし，〈純粋〉数学者の視点（もし完全に〈純粋な〉数学者がまだ居たとして）からは，それは無意味である．とくに〈長年にわたる人々の経験〉（または他の議論に必要な他の事実）は，チェス盤上のビショップ（слон）は対角線に沿って動くことができるという事実を，支持したり，反証したりすることができるだろうか．この規則は，チェスの駒としてのビショップを特徴付ける条件を示しているだけで，それがなんらかの真理を示すものではない．同じように，長年にわたる人々の経験が，平面上の任意の二点ＡとＢにたいして，ＡとＢを通る一本の（おまけに唯一の）直線が平面内に存在することを支持し，あるいは反証することができるだろうか？　現代数学の観

点からは，平面とは単に多くのラテン文字で表わされる要素の集合 $\{A, B, C, \cdots\cdots\}$ であり，またラテンの小文字で表わされる要素の集合 $\{i, m, n, \cdots\cdots\}$ である；これらの第一の集合の要素を〈点〉と呼び，第二の集合の要素を〈直線〉と呼ぶが，それらの名称は何を選んでもよい[1]．

さらに，このようにして(全く形式的に！)導入された〈点〉と〈直線〉は，一連の関係で互いに結び付けられ，その中の基本的で最も主要なものは，結合関係である．そして平面上の点と直線を結合する関係から，一連の〈規則〉，すなわち〈条件〉が生じ，その一つが公理となる．数学者の観点から言うと，その公理の根拠についての問題（あるいは十分に理由のある動機についての問題）は無意味である．ちょうどそれは，チェス盤の上のビショップの運動規則の〈根拠〉について問うことが無意味であるのと同じである．

我々は，平面上の〈点〉と〈直線〉の概念を全く形式的に導入し，最後に，その根拠についての問題を述べ，それらの概念の極めて重要な着目すべき特徴を強調した．けれどもここで，われわれは元のテーマに戻ることにしょう．〈チェス盤〉は決まった概念をもっているのだろうか，いないのだろうか？　この問題にたいする答えは，実質的に上に与えられている．チェスを知らない人にとっては，これらの概念は無意味であり，我々にとって〈タララブンビア〉という，奇妙な，あきらかに意味不明な言葉が無意味なのと変わりがない．しかし，チェスの競技者にとっては，〈ビショップ〉という言葉は全く明瞭な意味をもつ：チェスのビショップとしてのその形，チェス盤上の最初の位置 c1-f1（〈白い〉ビショップの）と c8-f8（〈黒い〉ビショップの），さらにゲームに際して起こる，規則に従った駒の動き，盤からの消滅(〈ビショップの敗け〉)および盤への出現（ポーン（歩）の〈ビショップへの変身〉)，そしてそれらの規則の集合がビショップという概念を間接的に決定するものだと看做される．換言すれば，〈チェスのビショップ〉という概念は，それ自身は無意味であり，無限定である；しかし，〈チェスをする〉という言葉の組合わせが，この言葉に明瞭で必要かつ十分に複雑な意味―ここでは〈チェスのビショップ〉という特別な概念に合った意味を与えるのである．

ところで，(数学的な)点と直線という概念についても事情は同じである！　数学に（より正確には，平面幾何学に）なじみの少ない人には，明らかにこれらの概念はまったく無意味である．しかし，中学生でも平面幾何学が，点 A，B，C，……と直線 a，b，c，……という 2 種類の要素の集合で記述されることを知っている：それらの要素の組合わせで〈平面〉と呼ばれる対象が得られる；そこで点と直線は一定の規則に従い，その規則の全体が間接的に平面幾何学を決定し，その〈形成要素〉が点と直線およびそれらの要素を結合する〈基本的関係〉となる．

そういう訳で，(数学的な）点の概念自身は，平面幾何学の外では何の意味も持っていない：点は，悪名高いキージェ中尉と同様に《存在しない図形》であり，純粋数学の数学的概念に基づいて数学的に考えられたものである．日常生活での点の概念を表す，物理的空間の最小の（分割できない）領域，あるいは鉛筆によって紙に記された痕跡，あるいは鋭い印刷活字による印などは，数学的な点の

1) ギルバート D. Gilbert(1862-1943) は次のように言っている：ユークリッド幾何学の内容は，〈点〉，〈直線〉および〈平面〉という言葉を，例えば〈椅子〉，〈テーブル〉および〈ジョッキ〉という言葉で置き換えても，なんらの変更を受けない(これらの言葉は，ギルバートがゲッチンゲンのビアホールのテーブルに向かって数学の問題を考察していたときに，この命題が生まれたことを示している)．それにも拘らず，ここでギルバートは J.L. ダランベール(1717-1783)が百科全書(の〈定義〉)で示した次のような認識を部分的に追い抜いている《幾何学の本質は，ふつう円と呼ばれている対象を三角形と名付けても（滑稽ではあるが）正確に述べることができる》.)

概念とは無関係である．それはチェスの競技者には，インドの象（слон）やアフリカの象（слон）や無関係なのと同様である．(訳注．ビショップを意味するロシア語（слон）には，象の意味もある．)そのような訳で，感覚器官で観察されたり，計器で記録された物理的空間は，公理系で形式的に定義された，抽象的一数学的な空間とは無関係である．さらに，それらの二つの〈空間〉は全く違った概念体系をもたらす：数理科学の領域と自然科学の領域を，プラトンの言葉を使えば，〈精神の世界〉と〈見える世界〉を．

しかしよく考えてみると，漠然とした不満感，完全には理解していないことを言ったという意識が残る．古代バビロニアやエジプトの幾何学の深い知識，ピタゴラスの定理や切頭角錐の体積にたいする公式などを含む知識を思い出そう．また，数学と言うものが現れたのは，バビロニアの神官やエジプトの書記が彼等の教科書を作ったよりもはるかに後であり，やっとB.C. 6-5世紀以後のことである．なぜ，数学の一分野に属する幾何学が，数学よりも前に現れたのだろうか？　逆説的な意味を持つ同じ様な命題，魚類一般が現れる以前に，スズキが地球に現れた，とこれは同じではないだろうか？　この見かけの逆説は，例えば〈点〉(数学的，あるいは物理的な)または〈ビショップ〉(チェスの，あるいは象)という言葉と同様に，〈幾何学〉という言葉が二つの全く違う意味を持つことで説明できる．ところでその際に，純粋に言語学的にせよ，一つの言葉をでたらめに違う意味に用いる結果として，ロシア語の同じ単語で表わされる，チェスのビショップと生きた象の間に関係が生じるのと同様に，〈点〉や〈幾何学〉という言葉の持つ二つの意味の間の関係にも豊かな内容が生まれ，それはわれわれの問題にとって重要で，詳しく検討する必要のあるものだ．

幾何学の奇妙な世界—そこでは全てが有限で，具体的であり，分かりやすく，感覚的で，とりわけ透明で，実態が無く，明瞭に定義がなされている．円筒の体積にたいする公式は，水の量を正確に示し，その水はコップや容器に注ぐ事が出来る．ところが〈円筒〉，〈円錐〉，〈直線〉，〈平面〉などの言葉は皆抽象的なものを表わし，実際に出会うことも，作り出すこともできない．平面を表わすには，例えばよく磨き上げた金属板を使うことができるが，それは平面そのものではなく，その一部分を表わすにすぎない．何故かと言うと，(無限の)全平面はそれを表わそうと試みる事さえ不可能で，板の表面を無限に広げようとすると，宇宙の基本構造についての極めて複雑な問題が生ずる．しかし，金属板の平面の一部でさえもが本当は近似的である．その表面を〈完全に〉滑らかに磨き上げようとすると，物質の原子構造が邪魔になり，金属板を構成する原子の性質が問題になるので，普通の幾何学から離れて原子レベルの領域に入り込み，平面の問題から逸れてしまう．直線の簡単なモデルは，例えば机の端で，〈正確な〉モデルは光線で与えられる．そしてロバチェフスキーやガウスが〈物理的な〉三角形でやったように，内角の和を非常に正確に測定するとき，一つの頂点から他の頂点を見通す線である三角形の辺を使う．ところが，現代物理学の立場からは，光は複雑な粒子—波動性をもち，光を〈ニュートン流に〉粒子の流れである光子と考えたとき，光子の軌道は意味を持たず，直線について語ることはできない．しかし実際に，例えば建設工事に応用するとき，幾何学の公式や定理はあまりにも完全なので，技師は自分の計算が現実に合わなかったとき，公式や定理に問題があるとは考えもしない．

そういうわけで，明らかに我々の前には二つの〈幾何学〉が存在する．〈幾何学—物理学〉は自然科学の一分野であり，実在する物体の特別な性質，特にその寸法や形を対象とする．一方，〈幾何学—数学〉は数理科学に属し，日

常生活では実現しない(すなわち存在しない)一定の数学的構造を全体が(<理想的な>)完全性を持つものとして取り扱う．そして，<幾何学—物理学>は<幾何学—数学>よりも前に現れる(数学より前に幾何学が現れた事実の謎がこれで解消する)；しかし，<幾何学—数学>の誕生から，二つの幾何学の間の一定の，連続した関連が生ずる．<幾何学—数学>の論理体系にたいして，学者達は最初実在する物体の性質の理想化というルートを取った．自然界に起こる現象の中から，関連する事実のうち最も基本的な(すなわち，最も単純で主要な)性質を残して極限まで単純化するのである；板やプレート(その表面が<平面>と名付けられた)の上で行われた，光線を使った，あるいはプレートの端(<直線>と呼ばれる)で行われた，……多様な実験データの集積の結果から，この<主要な>事実は公理の形で簡潔に記述された．他方で，純粋に論理的に為された，<幾何学—数学>における抽象的な対象の性質についての結論は，素速く(そして成功裏に)<幾何学—物理学>の対象だった物体の性質の研究に適用された．ときに，数学的な結論と物理的な観察が矛盾することも有ったことは事実である；例えば，光の速さを測定したマイケルソンの実験結果の解析のように．しかし，そのような矛盾は<数学的空間>の修正によって，実際の現象を含む，前より完全な，新しい抽象的枠組みを創造することに寄与した．

したがって，<幾何学—物理学>と<幾何学—数学>の相互関係は，事実の帰納的な集積の段階(<幾何学—物理学>)を通して正確な知識が生まれるという，一般的な発展過程を繰り返している．これを一般化すると，この事実に基づいた演繹的な理論(<幾何学—数学>)の建設は，実際の事実に適用される結論をもたらす；得られた結論の実験的な検証(再び<幾何学—物理学>)；再び得られた事実による理論の再構築と修正(もう一度<幾何学—数学>)—終わりのない反復．換言すれば，<幾何学—数学>は物理的宇宙の数学的モデルとして生じたのだ．このモデルの実際的な価値は，最初は，それをもとにして実際の(物理的)世界に触れることが可能な結論を得られることだった．次に，<幾何学—物理学>が，アリストテレスの<誘導科学>の建設に対応して考えられた，抽象的(数学的)空間の物理的モデルとして考察の対象となった．ここで<誘導科学>とは，基礎的(非限定的)な対象およびそれらの間の関係の体系であり，またそれらの対象と関係とを特徴付ける公理の集合である．正に，このような幾何学へのアプローチは，ガウスとロバチェフスキーが<物理的>三角形の内角の和を測定することによって，それとは知らずに発明した非ユークリッド幾何学の研究と一致する(ガウスの場合，三角形の頂点は地表の離れた3点であり，ロバチェフスキーの場合は3個の天体であった)．もちろん，それらの測定の結果はロバチェフスキー幾何学が数学の理論として正しいか，誤りであるかという問題とは無関係である．しかし，それが物理的モデルを持つことは，その理論の存在を完全に正当化することであり，その必要性を示すことでもある．

数理科学(今までの表現では<幾何学—数学>)と自然科学(<幾何学—物理学>)の二面的な関係は，人々の生活と科学体系とにおける数学の位置を示している．かつて，高名なガウスはこう言った：《数学—それは科学の女王である》；しかし現在われわれは，数学がもっと重要な役割を演じていることを知っている；数学は全ての科学(自然科学と人文科学)の役に立っており，それらを助け，あらゆる事実と現象を記述するために用いられる道具を提供している．さらに，数学は—それなしには王が王で有りえず，科学が科学で有りえないものである．なぜならば，ある学問の<科学性>のレベルは，そこに適用された数学的推論の量，およびその学問に特有な演

繹的結論の深さと内容で測定されるからである（フランス語と英語の science という言葉について，前に述べた注意を思い出していただきたい）．

数学の力は，第一に，その中に含まれる数の体系と形式的枠組みが，この世に存在するあらゆる錠前にたいする〈普遍的な鍵〉に成り得ることである；数学は，物理学にも，生物学にも，工学にも，社会学にも，天文学にも，言語学にも同じように適用できる．現実の状況の数学的モデルは，数学的構造であって，その対象は理想化された現実の〈もの〉（あるいは概念）とみなされる．また，それらの対象の間の抽象的な関係は，現実の要素の間の具体的な関係とみなすことができる．そのようなモデルは，われわれの取り扱う概念の種々の性質の，簡潔で見通しのよいリストを提供することによって，それらを解析し，将来の予測を立てる可能性を与える．正にそれゆえに，後で立証されるべき予言が，それぞれの科学の探求の基本的な対象となり，その価値を決める．数学的な学問のこの普遍性が，優れた物理学者 E. P. ウィグナーが，《自然科学にたいする数学の不可解な適用妥当性》について当惑気味に語る原因となったのである；ランダウと同様に，ウィグナーにとっても，数理科学は〈超自然科学〉であった．

（訳　こじま　ひでお）