Basic 数学 '94, 10

«Квант» для младших школьников

ソ連科学誌・クウァントから

# やさしい物理学 ㉕

小島　英夫（静岡大学）訳



## 1. 静電気学の基本問題を解くための定理　I. K. ベルキン（1981, №12, pp.18－20）

静電場が力線を使って表されることは，良く知られている．力線の数と，電場を作り出す電荷 $q$ の間の関係を導こう．そのために，電場の流量という考えを説明しよう．

ある曲面を通る電場の流量は，積 $ES$ で定義される．ここで，$S$ はその曲面の面積であり，$E$ は電場強度ベクトルの曲面に垂直な成分の大きさである[1]．（'流量'の考えは，ここでは流体の流量との類推で定義されている．流体の場合には，断面積 $S$ の管を単位時間に流れる流体の量，すなわち $vS$ が流量である）．

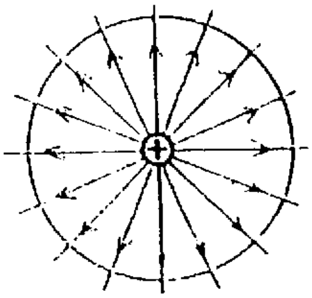

図 1

まず最も簡単な場合，一個の点電荷から始めよう．正の点電荷 $q$ が作る電場の力線の図は，図 1 のようになる．電荷 $q$ の位置に中心を持つ半径 $r$ の球を考え，この球の表面を貫く電場の流量を決めよう．電荷から出る力線は球面に垂直であり，球面の各点で電場強度の大きさは，等しい値

$$E=\frac{q}{4\pi r^2\varepsilon_0}, \tag{1}$$

を持つ．ここで，$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\,\mathrm{C^2/N\cdot m^2}$ は真空の誘電率である．ところで，$4\pi r^2$ は球の表面積であるから，それを $S$ と書くと，次の式を得る：

$$ES=\frac{q}{\varepsilon_0}. \tag{2}$$

これから，点電荷によって作られた電場の，球の表面を通る流量は，球の半径には関係なく，電荷の量 $q$ だけに依存することが分かる．したがって，いくつもの同心球を描くと，それらの球を通る電場の流量はすべて等しい．明らかに，それらの球を貫く力線の数も等しい．

電荷から出る力線の数 $N$ を電場の流量に等しいと定義しよう：

$$N=ES=\frac{q}{\varepsilon_0}. \tag{3}$$

比 $N/S$ は力線に垂直な（直角な）表面の単位面積を貫く力線の数を表し，力線の密度と呼ばれる．明らかに，これは考えている点における電場強度の大きさを特徴づける．

電場の流量，すなわち力線の数は，一個の点電荷の電場にたいしてだけでなく，点電荷の集団全体の作る電場，さらに帯電した物体の作る電場にたいしても $q/\varepsilon_0$ に等しいことが示される．そのとき，式(3)の $q$ は全ての電荷の和を表すと考えることにする．そればかりでなく，球面を任意の閉じた曲面に置き換えたときにも，その曲面を貫く電場の流量は変らない．

これがガウスの定理である：**電荷の系を内部に含む，閉じた曲面を通る電場の流量，すなわち電気力線の数は，$q/\varepsilon_0$ に等しい．ここで $q$ は電荷**

1　電場が曲面に垂直でないときには，電場の流量を計算するのに，電場強度の曲面に垂直な方向への射影だけを考える必要がある．

の総量である．

ガウスの定理を使って，静電気学の具体的な問題を解いてみよう．

1．**導体の内部の静電場の強さはどれだけか？**

導体とは，内部に自由電荷を持つ物体である．これらの電荷は，実際自由に導体内のどこにでも動いてゆける．電荷の移動を妨げる唯一の障害は導体の表面で，電荷はそれを乗り越えることができない．

帯電した，孤立した導体を考えよう．その導体の周りには，明らかに電場が存在する．**帯電した導体の内部には電場は存在しない，すなわち電場強度は零である，**ことを証明しよう．

良く知られているように，帯電していない導体では，全電子の負の電荷は全陽子の正の電荷と正確に釣り合っている．しかし，導体が帯電すると，電荷の釣り合いは破れる．導体には，負に帯電したとき電子の過剰が，正に帯電したとき陽子の過剰が(電子の不足が)生ずる．第一の場合には，互いに反発し合う過剰な電子は出来るだけ互いに遠ざかろうとし，結果的に導体の表面に集まる(電子はそこを通り越せない)．導体の内部には電荷の釣り合いが生じ，そこでは電荷の和がふたたび零になる．

第二の場合には，逆に導体の表面の電子は正電荷の引力によって導体の内部に移動し，過剰な正電荷を中和する．導体内部の電荷の釣り合いが再び保たれ，過剰な正電荷はその表面に集まる．

つまり，導体に与えられた任意の符号の電荷は，その表面に分布する．導体の内部，すなわち導体の表面の作る閉じた曲面の内部には，電荷はない($q=0$)．すると，ガウスの定理より，

$$E=\frac{q}{\varepsilon_0 S}=0.$$

それゆえ，導体の内部には電場はない．

2．**帯電した導体の表面では力線の向きはどうなっているか？**

帯電した導体の表面にある1個の自由電子には，表面にある他の電子から力がはたらく(導体の内部では正と負の電荷の和は零である)．電子は表面に沿って自由に移動できるから，最終的に，各電子にはたらく力の，表面に平行な向きの成分が釣り合うように，電子は分布する．ということは，表面の任意の点で，電場強度の表面に平行な方向への射影が零になることである．これは，**電場の力線が帯電した導体の表面に垂直に向いている場合にだけ成り立つ**(図2)．

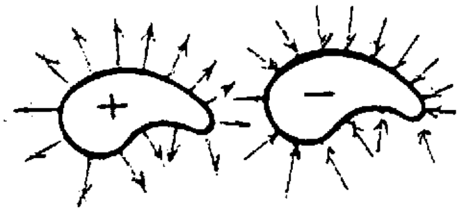

図 2

3．**帯電した板の作る電場強度はどうなるか？**

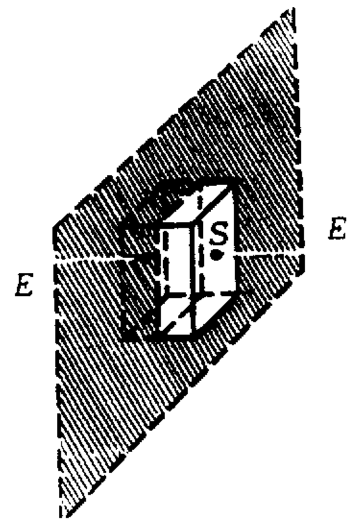

図 3

図3に電荷 $q$ を持つ，面積 $S$ の帯電した導体板の一部を描いた．

この板によって作られた電場の力線は，どこでも板に垂直であることを，われわれは知っている．しかし，電場強度の大きさはどれだけか？

板の一部を考えて，それを囲む，力線が垂直に横切る閉じた曲面を作る．そのような曲面としては，例えば板と平行な底面をもつ直方体を考えればよい．すると，電場の力線は底面にたいしてだけ垂直で，他の4面には平行である．二つの底面の面積は等しく $S$ である．

ガウスの定理によって，

$$E\cdot 2S=\frac{q}{\varepsilon_0},\ \rightarrow E=\frac{q}{2\varepsilon_0 S}.$$

この式から分かるように，任意の点における電場強度は，帯電した板からその点までの距離には依らない．このような電場を，**一様な電場**という．

4．**帯電した導体球の作る電場強度はどうなる**

か？

導体球の大きさに関係なく，電場の力線はどこでもその表面に垂直で，したがって半径に平行である（図4）．球の中心から$R$だけ離れた，任意の点Mにおける電場強度の大きさを求めよう．この点を通る力線に垂直な閉じた曲面を考える．そのような曲面として，導体球と中心を同じくする，半径$R$の球をとると，その面積は$4\pi R^2$である．

ガウスの定理によって，$ES=q/\varepsilon_0$ だから

$$E=\frac{q}{\varepsilon_0 S}=\frac{q}{4\pi R^2\varepsilon_0}.$$

帯電した球は，その周りに，中心に置かれた点電荷と同じ電場を作る（図4参照）．

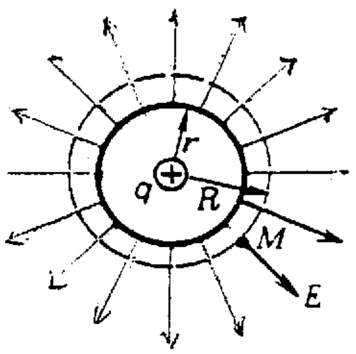


図4

## 2．電気力線とガウスの定理　A. チェルノウサン (1990, No.3, pp.52〜55)

あなたは，物理の授業で，電場の直観的な表現法として，電気力線の図を使うことを学んだであろう（ここで'電場'と言うのは，静電場のことである）．電気力線に接線を引くと，電場強度の向きが分かり（力線上の矢線はそのベクトルの向きを示す），異なる点の力線の密度（すなわち，力線に垂直な単位断面積の面を通る力線の数）を比較すると，電場強度がどこで，どれだけの比率か，を知ることができる．しかし，電気力線の意味はそれで尽きるわけではない．

あなたの良く知っている，自由空間では力線がとぎれないという性質は，実際に電場の最も重要な性質である．これらの性質をまとめると，次のようになる：電場は，電荷の間の自由空間ではとぎれず，密度の規則に従う力線で表すことができる；電気力線は正の電荷に始まり，負の電荷で終わる；各電荷に始まる（終わる）力線の数はその電荷の大きさに比例する．

あなたは，驚いただろうか？　この性質はあなたにとって，当然のことだったろうか？　それは決してそれほど簡単な性質のものではない．クーロンの法則がほんの少し違っていたら，力線をとぎれなく引くことは出来なかったろう．一例として，点電荷を考える．その点から遠ざかると，力線の密度は減少する．したがって，電荷からの距離が2倍になると，力線の密度は4分の1になる（力線の数は変らず，球の表面積は4倍になるから）．電場強度は何分の1に減少しただろうか．力線の密度と同じく4分の1になる．クーロンの法則が$1/r^2$だからこそ，そうなるのである．もし，例えばそれが$1/r^3$であったとすると，電場強度は4分の1ではなく8分の1になり，密度の規則が成り立つには力線は$2r$までの途中の$r$でとまらなければならない．それが自由空間で起こるのである．

電場の力線のとぎれない性質を，数学的に厳密に表しているのは，ガウスの定理である．ガウスの定理を定式化し，説明するために，初めに定性的に力線を学び，次に正確な定量的表現を求める．曲線の連続性について要約することから始めよう．

任意の閉じた曲面を考える．曲面の内部に電荷がないと，そこから出てくる力線の数は入る数に正確に等しい．入る線に負の符号を付けて，出る線と同等に扱うのが便利である．すると次の様に言える：**空の**（電荷を含まない）閉曲面から出てくる力線の総数は零である．曲面の内部になんらかの電荷が在ると，明らかに**曲面から出てくる力線の数は，その電荷の値に比例する**．これはガウスの定理の定性的な表現である．さらに先へ進もう．

スカラー量$\Phi$を次の式で導入し，それをある小さな面素を通る強度ベクトルの流量と呼ぶ：

$$\Phi=ES\cos\alpha. \tag{1}$$

ここに$\vec{E}$は考えている面素の位置での電場強度（面素は小さいとしているので電場はそこで一様としてよい），$S$は面素の面積，$\alpha$はベクトル$\vec{E}$と面素に垂直な単位ベクトル（法線ベクトル）$\vec{n}$のなす角である．図1に於いて，面素$S$を通る

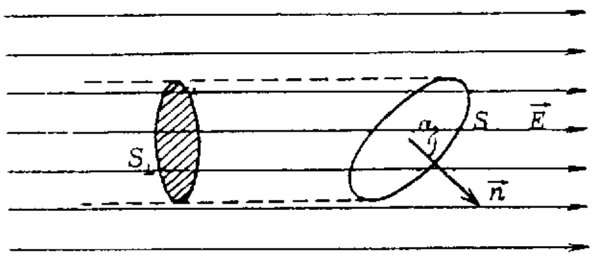


図 1

力線の数は，面素の横面積 $S_\perp=S\cos\alpha$ に力線の密度を掛けたものに等しい．力線の密度は $E$ に比例するから，面素を通る力線の全数は流量 $\Phi$ に比例する．ある閉じた曲面から出る力線の総数は，その曲面全体を通る流量(すなわち，曲面の各小部分を通る流量の和)に対応する．出てくる線は流量に正の寄与をし，入る線は負の寄与をするようにするために，曲面への垂線はどこでも外へ向かって，'見る'ことにする．

すると，ガウスの定理は次の様に定式化することが出来る：**任意の閉じた曲面を通る電場強度ベクトルの流量は，その曲面の中に含まれる全電荷に比例する．**この定理を証明し，同時に比例係数を計算するために，まず流量 $\Phi$ の，簡単ではあるが非常に重要な性質を考察しよう．

式(1)を $\Phi=(E\cos\alpha)S=E_nS$ と書き換える．ここで，$E_n$ はベクトル $\vec{E}$ の法線ベクトル $\vec{n}$ 方向への射影である．もし電場が幾つかの電荷によって作られているときには，重ね合わせの原理により

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\cdots+\vec{E}_k$$

他方，ベクトルの和の射影は射影の和に等しい：$E_n=E_{1n}+E_{2n}+\cdots+E_{kn}$．これから，強度ベクトルの全流量は各電荷の作る流量の和に等しい：$\Phi=\Phi_1+\Phi_2+\cdots+\Phi_k$．それゆえ，全流量への各電荷の寄与について考えることが出来る．

まず，閉じた曲面の外にある点電荷 $q$ からの流量への寄与は零である，ことを証明しよう．小さな円錐によって切り取られた曲面の二つの小面積を考える(図2)．すると，

$$\Phi_1=E_1S_1\cos\alpha_1=-E_1S_{1\perp},$$

$$\Phi_2=E_2S_2\cos\alpha_2=E_2S_{2\perp},$$

ここで，

$$E_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_1^2},\qquad E_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r_2^2}.$$

相似則によって

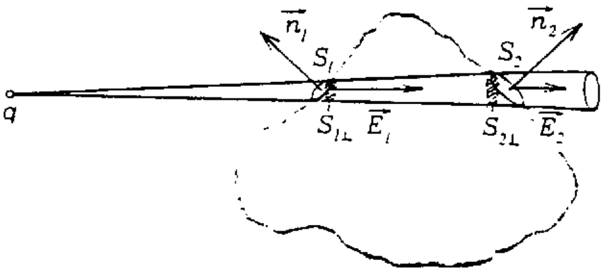


図 2

$$\frac{r_1^2}{r_2^2}=\frac{S_{1\perp}}{S_{2\perp}}.$$

したがって，

$$\Phi_1=-\Phi_2,\quad \text{or}\quad \Phi_1+\Phi_2=0.$$

流量の同様な相殺が，任意の他の対応する部分の対にたいしても成り立つ．

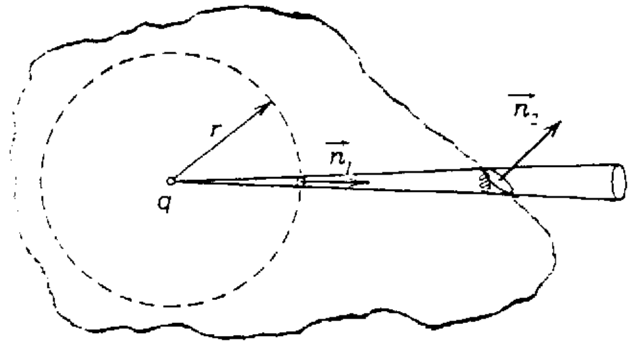


図 3

次に，閉じた曲面内にある点電荷が流量に与える寄与を計算しよう．電荷を半径 $r$ の球面で囲む(図3)．前と同じ様に考えると，今度は $\Phi_1=\Phi_2$ を得る．すなわち，考えている任意の曲面を通る流量は球面を通る流量に等しい．ところで，球面を通る流量は容易に計算できる：

$$\Phi=ES=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}4\pi r^2=\frac{q}{\varepsilon_0}.$$

こうして，ガウスの定理の最終的な形が得られる：**任意の閉じた曲面を通る電場強度ベクトルの流量は，その面内に存在する全電荷を真空の誘電率で割ったものに等しい．**すなわち，

$$\Phi=\frac{\sum q_{\rm in}}{\varepsilon_0}\qquad(2)$$

それではここで最も快適な部分に移ろう——成果を摘み取ろう．ガウスの定理の最初の応用は電場強度を計算することである．まず断って置かなければ成らないが，この方法で解ける問題の種類はそんなに多くはない(重ね合わせの原理を使う方法に較べて)．しかし，それでもとにかく，存

在する．例えば，もし空間内の知りたい領域における強度ベクトルの向きを予め知っているとき，あるいは強度ベクトルの流量の計算が簡単に出来るような閉じた曲面を選ぶことが出来るとき，我々は成功を期待できる．しかし，その代わりなんとすばらしい成功だろう！

良く知られているように，ニュートンは，物体にはたらく球(地球)の引力は，球の全質量がその中心に集まったとした場合と同じであることを証明するのに，何年もかかった，重ね合わせの原理を使って証明をするには，かなりの積分計算をする必要がある．ところが，実質的に同じ問題を，いかに簡単に取り扱うことができるかを示そう．電荷$Q$が一様に帯電した球を考え，その中心から$r$の，球の外部の点における電場を計算しよう(図4)．対称性の考察から明らかなように，電場強度ベクトル$\vec{E}$は，どこでも動径方向を向いている．半径$r$の球を通る強度ベクトルの流量を二つの方法で計算しよう．流量の定義により，

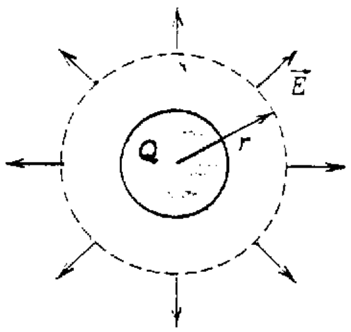


図4

$$\Phi=ES=4\pi Er^2,$$

他方，ガウスの定理により

$$\Phi=\frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

それらの関係から，次の式が得られる：

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

帯電した球の外部の電場は，球の中心に置かれた点電荷の電場に等しい．

もう一つの例：表面電荷密度が$\sigma$に帯電した，無限に大きな板の作る電場を求めよ(図5)．対称性から，ベクトル$\vec{E}$は，どこでも板に垂直であることが分かる．板に対称に置かれた，円筒形の閉じた曲面を考える．円筒の側面を通る強度ベクトルの流量は零であり，面積$S$の底面を通る流量は

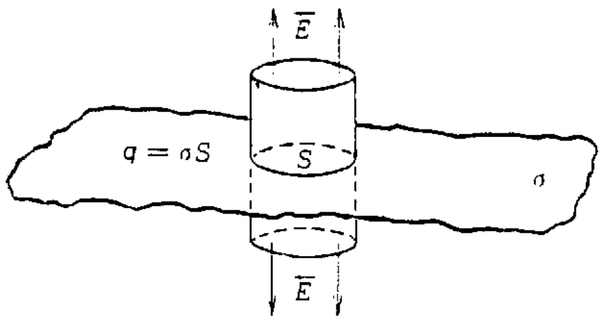


図5

$ES$である．すなわち，

$$\Phi=2ES.$$

ガウスの定理により

$$\Phi=\frac{\sigma S}{\varepsilon_0}.$$

両式を比較して，

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

最後に，もう一つの例を示そう．これは導体の非常に重要な性質を表す．導体の中の全電荷は，いつもその表面に分布することを証明する．導体の内部の電場強度は零であるから(そうでないと，自由電荷の運動が生ずる)，導体内部に考えられた，任意の閉じた曲面を通る強度ベクトルの流量は零である．ということは，導体の内部における，どんなに小さな曲面の内部の電荷も零である，ことを意味する．したがって，導体の全電荷はその表面に分布している．

ここで，重要な注意をしておこう．導体の内部の電気的中性の証明はガウスの定理に基礎を置いており，これは電気力線の連続性に基づいている．これはさらに，クーロンの法則$1/r^2$が成り立つときにだけ正しい．したがって，こういう結論になる：クーロンの法則の正しさは実験的に検証できる．それによって，導体内部に置ける電気的中性が充分成り立つことが分かる．

そういうわけで，たった一つの定理――ガウスの定理から，多くの興味ある結論が得られることが分かった．

前回(Basic 数学，'94．7月号)の練習問題の答

1．1/3

2．$3.1\times10^{-6}$A.

(訳　こじま　ひでお)