Basic数学 '94 No.6

«Квант» для младших школьников

# ソ連科学誌・クヴァントから

## やさしい物理学 ㉓

# 静電気学におけるエネルギー保存則

S. A. ゴルジュニン　小島　英夫 (静岡大学) 訳

Japanese translation rights arranged with VAAP through Japan Soviet Copyright Center. Tokyo.

エネルギー保存則は，最も一般的な形で，任意の系におけるすべての可能な変化の際のエネルギー的釣り合いを決定する．その法則を次の形に書いておこう：

$$A_{out} = \Delta W - Q \tag{1}$$

ここで，$A_{out}$ は外部の力が考えている系になした仕事で，$\Delta W$ は系のエネルギーの変化，$Q$ は系に入った熱量である．これらの量の符号を，次のように取ることにする：もし，$A_{out}>0$ であれば系に正の仕事がなされ，$A_{out}<0$ であれば系が正の仕事をする；もし，$\Delta W>0$ であれば系のエネルギーは増加し，$\Delta W<0$ であれば系のエネルギーは減少する；もし，$Q<0$ であれば系に熱が入り，$Q>0$ であれば系から熱が出ることを意味する．

この記事では，静電気学におけるエネルギー保存則の〈役割〉を考えることにする．一般に，静電気的な系は，電場の中にあって互いに相互作用する電荷を含んでいる．

式(1)の各項を個別に考えていこう．

エネルギーから始めよう．電荷の間の相互作用エネルギーは，その電荷の系の電場の特性で表すことができる．例えば，帯電した，容量 $C$ のコンデンサーのエネルギーはよく知られた次の式で与えられる：

$$W = q^2/2C = CU^2/2 = qU/2, \tag{2}$$

ここで，$q$ は極板の電荷，$U$ は電極間の電位差である．コンデンサーは二枚の導体(電極，極板)からできた系で，次のような性質を持っていることを思いだそう：一方の極板から他方へ電荷 $q$ を移動させると(すなわち，一方の極板は $+q$ に，他方は $-q$ に帯電する)，その時に生ずる電場の電気力線は，一方の極板(正に帯電した)から出て他方の極板に終わる．コンデンサーの電場はその中にだけ存在する．

帯電したコンデンサーのエネルギーは，極板の間に局在する，エネルギー密度 $(\varepsilon\varepsilon_0 E^2/2)V$ の電場のエネルギーとして表すことができる．ここで，$E$ は電場強度である．実は，まさにこの事実が，そこにエネルギー密度のある，実在の対象として場を考える基礎になっているのである．しかし，これは電荷の間の相互作用によってエネルギーを決定するのと等価な方法であるにすぎないことを，忘れてはならない(それを電場のエネルギーと呼ぶことにする)．それゆえ，コンデンサーのエネルギーを公式(2)によって，次の形に書くことができる：

$$W = (\varepsilon\varepsilon_0 E^2/2)V \tag{3}$$

ここで，$V$ はコンデンサーの体積である．この式は確かに一様な電場にしか使えないが，この形にエネルギーを表すと非常に分りやすく，したがって便利である．

電荷の相互作用エネルギー(電場のエネルギー)の他にも系のエネルギーが在ることは確かである：帯電体の運動エネルギー，重力場の中でのそのポテンシャルエネルギー，弾性エネルギー，物体への結合エネルギーなど．

次に，外力の仕事について考えよう．通常の力学的仕事 $A_{mec}$(例えば，コンデンサーの極板の移動による)を使って，電気的な系に対する外部電場の仕事を取り扱うことができる．例えば，コンデンサーを充電させ，あるいは放電させる電池の仕事について．電池の問題は――それに接続された物体間に一定の，固有なポテンシャル差を生ずることである．電池は唯一の可能な方法で，一方の物体から電荷を取り，それを他方に与える．電源は電荷を創りだすことはなく，ただそれを移動させるだけである．その際に，系の全電荷は保存

される——これは自然の基本法則の一つである．

電源の中の，電荷を移動させるための電場の発生は多様であり，種々の《機構》が存在する．電池および蓄電池では——電気化学的反応であり，発電機では——電磁誘導である．現実に，与えられた電荷の系(帯電体)に対しては，それは外部からかけられた電場である．起電力$E$の電源によって，負の極板から正の極板に電荷$\Delta q$が移動すると，外部の力は，仕事

$$A_{\mathrm{bat}}=\Delta qE \tag{4}$$

をする．このとき，$\Delta q>0$であると$A_{\mathrm{bat}}>0$であり，電池は放電する；もし$\Delta q<0$であると$A_{\mathrm{bat}}<0$であり，電池は充電して，化学的(または磁気的)エネルギーがそこに蓄積される．

最後に，熱の放出について述べる．ここでは，ジュール熱，すなわち電流が抵抗を流れた時に生ずる熱だけを考えればよい．

それでは，いくつかの具体的な問題に沿って考えていこう．

**問題1**．容量が$C$の二個の平板コンデンサーが，それぞれ同じ起電力$E$の電池に接続されている．ある時刻に，一方のコンデンサーは電池と切断されるが，他方は接続されたままである．それから，両方のコンデンサーの極板をゆっくりと動かし，容量を元の$1/n$にする．それぞれのコンデンサーで，どれだけの力学的仕事が必要か．

コンデンサーの電荷の変化の過程が，常にゆっくりと行われれば，熱の発生は無視できる．実際，抵抗$R$を通して$t$時間内に電荷$\Delta q$が流れると，その時間内に抵抗には熱量$Q=I^2Rt=(\Delta q/t)^2Rt=(\Delta q)^2R/t$が発生する．時間$t$を十分に長く取れば，熱量$Q$はいくらでも小さくすることができる．

第一の場合には，極板上の電荷は一定で(電池とは切れている)，$CE$である．力学的仕事は，コンデンサーのエネルギー変化で決まる：

$$A_{\mathrm{mec}}=\Delta W=(CE)^2/2(C/n)-(CE)^2/2C$$
$$=CE^2(n-1)/2$$

第二の場合には，コンデンサーの電位差が一定であり，電池も仕事をする．したがって，

$$A_{\mathrm{mec}}+A_{\mathrm{bat}}=\Delta W.$$

電池を通して電荷

$$\Delta q=CE/n-CE=-CE(1-1/n)$$

が流れる．この電荷は負であり，これは電池が放電することを意味し，その仕事は

$$A_{\mathrm{bat}}=\Delta qE=-CE^2(1-1/n)$$

となる．コンデンサーの中の場のエネルギーは減少する：

$$\Delta W=(1/2)(C/n)E^2-CE^2/2$$
$$=-(CE^2/2)(1-1/n).$$

それゆえ，

$$A_{\mathrm{mec}}=\Delta W-A_{\mathrm{bat}}=(CE^2/2)(1-1/n).$$

電池の電荷の変化は，極板の移動によって，およびコンデンサーのエネルギーによって起こる．

極板の移動がどの様に起こるかは，関係がないことに注意しよう．容量が$1/n$になる，任意の他の変化の場合にも，おなじ結果が得られる．

**問題2**．図1に示した回路において，スイッチを閉じた後に，各抵抗に生ずる熱量を求めよ．容量$C_1$のコンデンサーは電位差$U_1$まで，容量$C_2$のコンデンサーは電位差$U_2$まで電荷を蓄えている．抵抗の値は$R_1$および$R_2$である．

この系に対するエネルギー保存則(1)は，次の形に書ける：

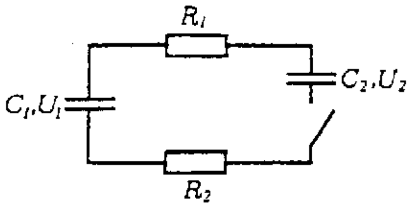


**図1**

$$0=\Delta W+Q,\ \text{i.e.}\ \ Q=W_{\mathrm{i}}-W_{\mathrm{f}}.$$

初期状態におけるコンデンサーのエネルギーは

$$W_{\mathrm{i}}=C_1U_1^2/2+C_2U_2^2/2$$

である．終状態におけるエネルギーを決めるために，2個のコンデンサーの電荷の和は変らないことを使う．それは$C_1U_1\pm C_2U_2$に等しい(符号は，コンデンサーの接続が同符号か異符号かに依る)．スイッチを入れた後では，この電荷で容量が$C_1+C_2$コンデンサーが充電される(容量$C_1$と$C_2$のコンデンサーが並列に接続される)．したがって，

$$W_{\mathrm{f}}=(C_1U_1\pm C_2U_2)^2/2(C_1+C_2).$$

これらの結果をつかって，

$$Q=W_{\mathrm{i}}-W_{\mathrm{f}}=\{C_1C_2/2(C_1+C_2)\}(U_1\mp U_2)^2$$

当然の事ながら，どちらの場合にも熱が発生する——ジュール熱が失われる．発生する熱量は，回路の抵抗値には依存しない —— 抵抗が小さけれ

を取る：

$$0=\Delta W+Q.$$

したがって

$$Q=-\Delta W=-(q^2/2C\varepsilon-q^2/2C)$$
$$=(q^2/2C)(1-1/\varepsilon)>0.$$

電荷の相互作用エネルギーの減少分が熱として発生する．

第二の場合には，電池が仕事をし，コンデンサーの電位差が一定である：

$$A_{\rm bat}=\Delta qE=(\varepsilon CE-CE)E=CE^2(\varepsilon-1).$$

それゆえ，式(1)は次のようになる：

$$Q=A_{\rm bat}-\Delta W=CE^2(\varepsilon-1)/2.$$

**問題 6**．二枚の，面積 $S$ の連結された導体板が，互いに距離 $d$ だけはなれ（$d$ は板の大きさに較べて小さい），板に垂直にかけられた外部電場 $E$ のなかに置かれている（図 3）．板の間隔を半分にするには，どれだけの仕事が必要か？

極板は同じ電位にあるので，その間には電場はない．板を近づける仕事の結果，体積 $S(d-d/2)$ の領域に強度 $E$ の電場ができる．したがって，式(1)と(3)により，

$$A=\Delta W=\varepsilon_0E^2Sd/4>0$$

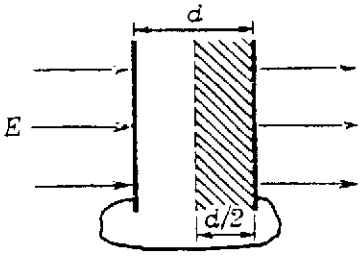


図 3

**演習問題**

1．2 個の同じ，容量 $C$ の平板コンデンサーが，並列に接続され，電位差 $U$ に充電されている．一方のコンデンサーの極板をゆっくりと離して，間隔を大きくした，その時必要な仕事はどれだけか？

2．容量 $C$ の 2 個のコンデンサーが電位差 $U$ に充電され，抵抗を間にして接続されている（図 4）．一方のコンデンサーの極板を急速に動かし，間隔を 2 倍にした．変化の間の極板上の電荷は変らないとする．抵抗で発生する熱量はどれだけか？

3．平板コンデンサーが起電力 $E$ の電池に接続されている．極板の面積は $S$，間隔は $d$ である．コンデンサーの中には，厚さ $d_1$ の金属板が極板に平行に入れられている（図 5）．金属板をコンデンサーから取り去るのに必要な仕事の最小値はいくらか？

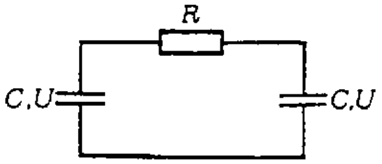


図 4

4．面積 $S$，厚さ $d$ の，大きくて薄い金属板が，強度 $E$ の電場に垂直に置かれている．電場を急速に 0 にした時，金属板に生ずる熱量はいくらか？

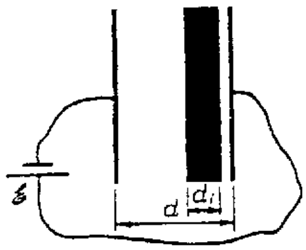


図 5

電場の中から金属板を取りだすために必要な仕事の最小値はいくらか？

5．平板コンデンサーの一方の極板がばねに吊るされている（図 6）．極板の面積は $S$，その間隔は $d$ である．コンデンサーに短時間の間電池を接続して充電し，電位差を $U$ にした．極板が接触しないためには，ばねの弾性定数は少なくともどれだけでなければならないか？ 充電している時の極板の変位は無視してよい．

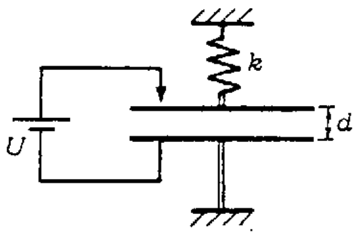


図 6

（訳　こじま　ひでお）