1993. No 10

«Квант» для младших школьников

ソ連科学誌・クヴァント誌から

曲率について

N.Y.ビレンキン*)/小島　英夫（静岡大学）訳

一昔前のサーカスでは，いろいろな芸をする力自慢が出場して人気を博したものだった．かれらは，5ペイカ銅貨を折曲げ，鉄の火掻き棒で結び目をつくり，両肩で鉄の帯を曲げたりしたものだった．しかし，神話の英雄ヘラクレスでさえ，もし彼が何等かの物体ではなく，空間を曲げて欲しいと頼まれたとしたら，立ち往生してしまっただろう．そこで問題になるのは，真空を曲げることであり，これは巨人アンタイオスを退治したり，ヘスペリスの園からりんごを取ってきたりするより，よほど難しいからである．また，この問題を解くには，現代技術の成果である，物体を変形させるための分塊圧延機も，打印機も，プレスも役にたたない．空間を変形させるものでなければならないのだから．

しかし，常日頃箴言を口にしながら，それについて何も考えないモリエールの主人公のように，われわれは誰でも空間を歪ませ続けていながら，それに気付かない．というのは，ここで働くのは人間の物理的な力ではなく，彼の質量だからである．なぜならば，著名な物理学者アルベルト・アインシュタインが明らかにしたように，重力と空間の歪みの間には関係がある．すべての質量は万有引力の法則によって他の質量を引きつけ，空間を歪ませる．質量が大きければ大きいほど，その作用は強い．われわれの質量はとても小さいので，自分の身体が引き起こす空間の歪みに気が付かないのである．

N.Y.ビレンキン

宇宙的なスケールでの質量の集積――恒星，星雲，全宇宙――だけが，認識できる程度に空間を歪ませる．

引力と空間の曲率の間の関係についてのアインシュタインの理論は，コスモロジー――宇宙の構造についての科学――を研究しているすべての科学者によって利用されている．この理論から，空間の歪みがとくに強いのは，物質の莫大な質量が小さな領域に集中している場所――白色矮星や仮想的な中性子星の近くであることが導かれる．

どのような方法で，物理学者たちはアインシュタインの正しさを確かめたのだろうか？　彼の理論によれば，多くの質量が集積した場所を通った光線はその方向を変える（図1）．ところで，すでにニュートンは，引力の作用によって光線が向きを変える筈だと言うことを知っていた．しかし，彼の理論によるずれの大きさは，アインシュタインの理論による値の半分である．1919年5月

KBAHT, 1992, No. 4, pp. 2-9, 15.

*)　N.Y.ビレンキン（1920-1991）は，優れたソヴィエトの数学者であり，クヴァントの常連の，人気のある執筆者であった．彼の一般向けの数学書‘組合わせ論’‘初等組み合わせ論’‘集合論についての対話’‘無限大を求めて’などはよく知られている．これらの書物はソヴィエトの数学者の一世代を育てたばかりでなく，今でも彼の中学生向けの教科書で数百万人が学んでいる．この記事はN.ヤコブレビチ（ビレンキン）が彼の亡くなる数ケ月前に校正したものである．

29日の皆既日食のときの観測は，アインシュタインの正しさを実証した．

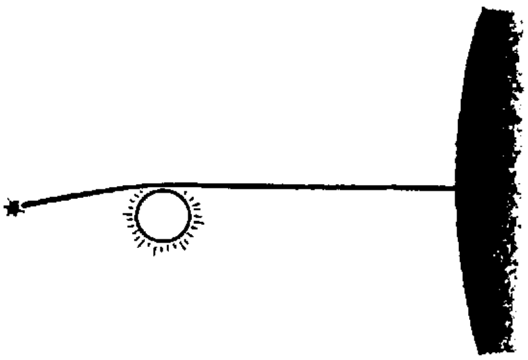


図1

曲った空間はありうるか？

曲線（曲った線）や曲面（曲った面）を想像することは出来るが，曲った空間を考えることは非常に難しい．

普通，空間の歪みに反対するために述べられる意見は，次のようなものである：曲線を直線に重ね合わすことは出来ないが，平面上あるいは空間内に置くことはできる．それとまったく同様に，曲面を平面に重ねることはできない——曲面を入れるためには，少なくとも3次元空間が必要である．したがって，曲った3次元空間は，それを包絡する4あるいは5次元の空間の中になければならない．哲学者の中には，さらに観念論や信仰哲学などのまったく時代遅れの主張を付け加える人々もいた．それに対して，空想科学小説の著者たちは，4次元空間という概念がとても好きである．H. G. ウェルズの短編や中編小説の多くには，4次元空間内の旅行が出てくる．

実際は，空間の歪みは4次元空間にはまったく関係せず，いわば，3次元空間の内部の事柄である．そして，歪みの発生は，その空間から出ることではなく，単にその内部での目盛の移動に過ぎない．

読者のみなさんの記憶を新たにするために，まず最初に，面上の2点間の距離を測ることによって面の曲率を決める方法を説明しよう．

マゼランの航海は必要だったのか？

何世紀もの間，人々は地球が平面だと思っていた．しかし，天文学的な研究（月食の際の地球の影についての，太陽や星についての）が，古代ギリシャの学者に球形の地球という考えを抱かせた．エラトステネスはかなり良い精度で（10%の誤差）地球の半径を測定することに成功した．しかし，キリスト教が体制の宗教になってからは，異教徒の科学は忘れられ，再び地球が平面であると言う考えが支配的になった．そして，球形の地球を実証するためには，マゼランの世界一周の航海が必要であった．

ここで，惑星ヤルメス（Я л м е з：地球 З е м л я と比較せよ．訳者）を考えよう．そこには知的生物が住んでいるが，空はいつも雲の覆いで隠されており，航海はなんらかの理由で不可能である．この惑星の住人は，彼等が周りを海で囲まれた平面の一部にではなく，球面に住んでいるのであることを知ることが出来るだろうか？　換言すれば，地球が丸いことを証明するためには，マゼランの航海は必要でなかったのだろうか？*)

ヤルメスの幾何学

表面の曲率という概念がどの様に生まれるのかを理解するために，惑星ヤルメスにおける幾何学の発展過程を観察しよう．幾何学は実験科学として，空間の性質の数世紀にわたる観察の理論的一般化によって生まれる．この惑星は雲で覆われているので，ヤルメスの幾何学者は惑星表面の観察だけで研究を行う．その表面上の2点を結ぶすべての線の中には，最も短いものがあることが分る（図2）．最も短い線を〈直線分〉と呼ぶ．つまり，この惑星を横から眺めることの出来る観察者は，その線を直線とは言わず，球の大円の円弧だと言うだろう．しかし，ヤルメス人は自分の惑星を外から眺めることはできず，表面に引かれた最短線を直線だというだろう（それにしても，われわれはしばしば〈矢のように真っ直ぐな道〉などという，実際には矢は大円の弧に沿って飛ぶのだが）．

つぎに，この直線の性質を明らかにする．最初は，研究がこの惑星の小部分だけで行われるが，

*) もちろん，著者はマゼランの航海の地理学的な価値や歴史的意味に疑いを抱いている訳ではない．この話は，単に数学的な問題として，星の観測や世界一周航海なしに，地球表面が丸いことを示すには，どうしたらよいかを考えているだけである．

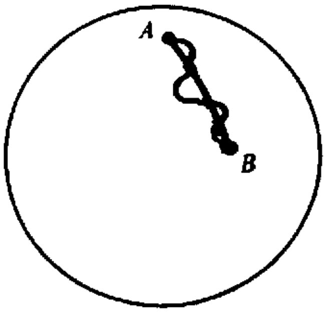


図2

測定精度は非常に悪い．それゆえ，測定精度の範囲内で惑星の表面上の〈直線〉の性質は平面上の直線の性質と同じである：２点を通る〈直線〉は１本だけで，２本の直線は１点だけで交わる（第２の交点は，はじめの交点と直径を挟んで反対側にあり，観察者には到達できない）．最後に，ヤルメスの幾何学者は，彼の〈真っ直ぐな線〉が無限に長いと信ずる．〈直線〉に沿って一方向に運動して行くと出発点に戻ってくるという考えは，途方もない，理解できない，健全な精神に矛盾したものと思われる．そしてヤルメス人の科学者は彼らの惑星の表面が無限に広がっているのであり，違った考えを持つ者はもちろん死罪を宣告される．

〈直線〉の性質をさらに研究すると，測定の限度内で，どんな三角形でもその内角の和は180°に等しいこと，直角三角形の斜辺の２乗は直角を挟む辺の２乗の和に等しいこと，などが分る．換言すれば，ヤルメスの人々はユークリッド幾何学を創ったのであり，彼等の惑星の表面に完全に密着していると考えられるのである．

しかし間もなく，物事はそう単純でないことが分る．技術の進歩に伴って，次第に広い土地を測量することができるようになる（ヤルメス人にとって，海を航海することは出来ないと仮定している）．そしてそれらの測定がユークリッド幾何学と矛盾することに気がつく．その事情を理解するために，球面上に三つの点 A，B，C を取る（図3a）．これらの点を〈直線分〉――それはわれわれの立場で言えば大円の円弧（すなわち，経線の円弧 AB と AC および赤道の円弧 BC）――で結ぶ．そうすると三角形 ABC が得られる．ただちに分るように，この三角形の三つの角はいずれも直角である．つまり，それらの角の和は270°であり，ユークリッド幾何学で予想される値180°ではない．すなわち90°だけ余分である．

他の三角形では，角の和の剰余は違う値を持つ．例えば，三角形 ABD（図3b）では，角 B と D は90°であり，角 BAD は180°である．この三角形の内角の和は360°で，必要な値より180°多い．これを一般化して，数値 $(\alpha+\beta+\gamma-180°)$ を考える．ここで，α，β，γ は球面三角形の頂角である．簡単のためにこの数値を剰余角と呼ぶことにしよう．

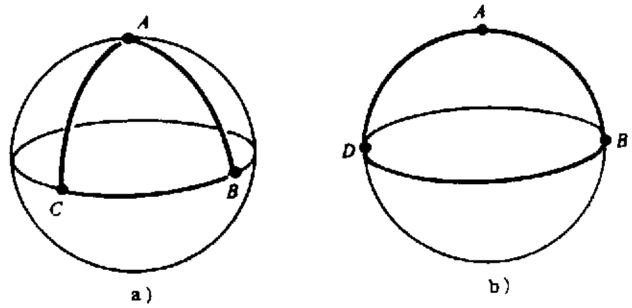


図３ａ，ｂ

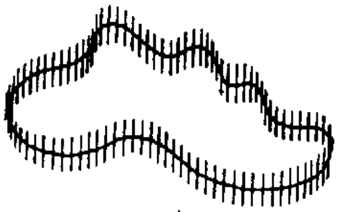
平行線の旋回

しかし，ヤルメスの人々は，三角形の剰余角の存在に気がつくばかりでなく，彼等が平面にではなく曲った表面に住んでいることを認識し，ピタゴラスの定理が正しくないのを知る．例えば，三角形 ABC で，角 A は90°であるが，その辺はすべて等しい．一般に，こういう場合には，どれが対辺で，どれが直角を挟む辺かを決めることはできない――すべての角が直角である．

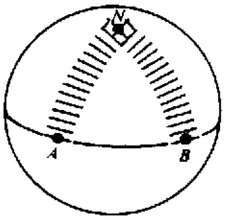
予期できなかった結果に対して，この惑星の表面における〈平行直線〉の研究がなされた．平面上に閉曲線（図4a の太い実線）を引き，それに沿って線分（細い実線）を常に互いに平行になるように移動して行くと，線分は最初の点に戻った時その方向が変っていない．惑星の小さい領域を測定すると，この結果が確かめられる（ヤルメス人にとって，一本の〈直線〉に対して直角な〈直線群〉は，互いに〈平行〉である）．

しかし，表面の大きな領域を測定すると，まったく違う結果が得られる．例えば，三角形 ABN（図4b）を取り，点 N で NA に垂直な線分を引く．この線分を常に平行を保つようにしながら，三角形 ABN の周に沿って移動する．点 A に達した時，線分は赤道に平行になっている．赤道は〈直線〉であるから，線分は点 B に平行移動した

とき，まだ赤道に平行になっている．そこでさらに，線分を経線 BN に沿って再び移動すると，点Nに戻ったとき線分は最初の方向と90°（すなわち，丁度三角形 ABN の剰余角）だけ旋回している．同様に，もし線分を図 3b の三角形 ABD の周に沿って移動すると，線分は180°旋回する．



a）



b）

図4 a，b

一般に，任意の球面三角形の周に沿って線分を平行移動した時，線分はその三角形の剰余角に等しい角だけ旋回する．線分を赤道に沿って一周させた時には，興味深い結果が得られる．ちょっと見ると，線分は出発点に旋回せずに戻ってくるように思われる（図5）．しかし，それは正しくない．もしすべての移動する線分を一つの点――球の極――に集めると，それは360°だけ旋回したことが分る（図5）．これは驚くに値しない結果である．なぜならば，赤道に経線の弧 AN を追加すると〈三角形〉NAN が得られる．この三角形で，二つの角は直角で，第三の角は360°である．それゆえ，その剰余角は360°である．それでは，さらに大きな剰余角を持った三角形は存在するだろうか？

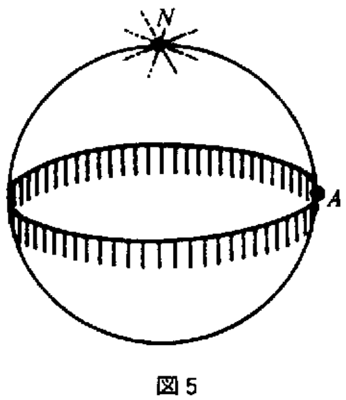


図5

曲率の測定

そう言うわけで，三角形の内角の和の測定，閉じた曲線に沿って平行に移動させた線分の旋回角の観察，ピタゴラスの定理の検証などは，この惑星の住人に，彼等の住んでいるのが平面ではなく，なんらかの曲った面であることを確認させる．任意の表面の曲率の尺度として，その表面領域の境界に沿って平行に移動させた線分の旋回角を彼等は使った．表面の曲率としては，その領域を三角形に分割し，すべての三角形の剰余角を加えあわせる，という方法を取ることもできる．もし二つの三角形をつなげて一つにすると，それらの余剰角は加算されるからである．

領域の面積が大きいほど，その領域は歪んでいることが分る．正確に言うと，任意の三角形の剰余角はその面積に比例する：

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=KS \qquad (*)$$

（これからは，角度を度ではなく，数学で普通に使われるラジアンで測ることにする（360°＝2π ラジアン）．この単位では平面三角形の内角の和は π に等しい）．このことから，次の結論が得られる：球面では，単位面積の表面の曲率はどこでも同じである．係数 K を曲率の尺度として使うこともできる．

一般に，単位面積の三角形の曲率がいつでも同じである曲面は，すべての面の中でたった一つしかない――それは球である．したがって，ヤルメスの幾何学者は，彼等が球面の上に住んでいるので，他の表面ではありえない，と結論した．その球の半径を計算するのもそれほど難しいことではない．もし係数 K が三角形の位置に依らないとすると，それを計算するには，どれか一つの三角形を取ればよい．例えば，図 3a の三角形 ABC を取ろう．その剰余角は90°あるいはラジアンで測って $\pi/2$ に等しい．この三角形の面積は球の面積の1/8すなわち $\pi R^2/2$ である．この値を式(＊)に代入して $K=1/R^2$ を得る，一方，任意の球面三角形に対して次の式が成り立つ：

$$\alpha+\beta+\gamma-\pi=S/R^2,$$

ここで，α，β，γ はその頂角で，S はその面積，R は球の半径である．この公式を使うと，三角形の内角と面積を測定することによって，球の半径を決めることができる．この方法は，角度の測定にとても高い精度が必要であるので，非常に便利であるとは言えない．地球の半径の測定には，他の方法――経線の弧の長さの測定が使われる．しかし，この方法では星の観測が必要である．

ガウス曲率

公式（＊）をつかうと，球の表面の曲率Kを表面の単位面積をつかって決めることができる．すでに計算したように，それは$1/R^2$である．換言すれば，球の半径が大きければそれだけその表面の単位面積の領域は歪みが少ない――ボールの表面は地球の表面より強く歪んでいる．

ドイツの偉大な数学者，カルル フリードリッヒ ガウス（1777–1855）――当時の人々は彼をMathematicorum princeps（数学の帝王）と呼んでいた――は，任意の表面の曲率を測定する次の様な方法を提唱した．任意の表面上で，球の表面におけるのと同じ幾何学を作ることが出来るだろう．そこで直線分の役割をするのは，〈最短の〉線（それはまた〈測地線〉とも呼ばれる），すなわち，二つの点を結ぶ線の中で，もっとも短いものである．これは最初，地球の表面上の距離を測定する際に，測地学者によって用いられた．ついでに言えば，ガウス自身が，表面の幾何学の研究をした後で，数年間，測地学的な仕事に携わっていたことがある．

測地線を使って三角形，四角形などを作ることが出来る．そのとき任意の曲った表面の上では，球面上と同じく，一般に三角形の内角の和はπに等しくない．面積の単位をつかった三角形の曲率を，ふたたび係数

$$K=(\alpha+\beta+\gamma-\pi)/S$$

で定義する．任意の表面において，異なる三角形に対するこの係数は違うだろう．さらに，それはある三角形に対しては正に，他の三角形に対しては負になるかもしれない（三角形は剰余角だけではなく，不足角をも持つことになる）．

表面のある一点における曲率を見いだすためには，その点を含む限りなく小さな三角形を取り，その曲率を面積の単位で求める．極限において，その点における表面の曲率が得られる．これがガウスの与えた曲率の決定法で，それは普通ガウス曲率と呼ばれる．三角形が剰余角を持つ時，ガウス曲率は正であるが，角度の和がπより小さい時には曲率は負になる．

もし表面が凸であると，そのガウス曲率は至る所で正であるが，図6に示したドーナツ状の表面（数学者はこれをトーラスという）では，太い実線の外側でガウス曲率は正，内側で負である．

図6

ガウス曲率の著しい特色は，表面の（伸び縮みのない）変形によっては曲率が変らない，ことである．この事から，円筒面のすべての点でガウス曲率は零である．なぜならば，円筒は平面の一片を変形して作ることが出来，平面の曲率は零だからである．同様に，頂点を除いた円錐面上のすべての点でガウス曲率は零である．

準球とロバチェフスキー幾何学

球面ではすべての点で曲率は等しく，さらに正である．他方，一定の負の曲率をもつ面も存在する．それを準球と呼ぶ．準球は以下に述べる方法で作られる．

次の様な状況を仮定しよう：点Aに人が立っており，犬の手綱を握っている（図７）．最初，犬は点Oにいる．それから，犬は直線Oxに沿って一定の速さで走りだすが，主人は犬を追って，いつでも犬の方に向いた速度で，綱をたるませずに走る．つまり，主人は最初AOに沿って走り出す．しかし，犬が直線Oxに沿って動くにつれて，主人が走る向きはOxとなす角度を減少させていき，走っている人と直線Oxの距離は縮まる．図７には，人がそれに沿って動く曲線を描いてある．これは追跡線（トラクトリクス）と呼ばれ，次の様な特徴のある性質を持っている：追跡線上の任意の点で接線を引いたとき，その点と軸Oxの間の線分の長さは一定である．

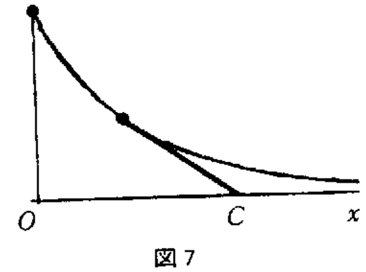


図７

追跡線を直線Oxの周りに回転して出来る曲

面を準球という（図８）．この面の上の幾何学は，ロバチェフスキー面の一片の上の幾何学と一致する．それゆえ，準球の発見は，非ユークリッド幾何学の発展における非常に重要な一段階であった．

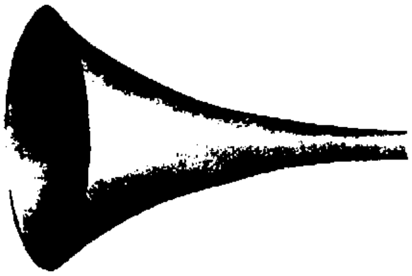


図８

面の球面投影法と曲率

面のガウス曲率の表現は，違う方法でも決定できる*)．

そのために，面の上の各点で垂線を立てる．平面に対する垂線はすべて同じ向きを持つが，他の面では違う向きを持つ．例えば，球ではすべての垂線は球の中心を貫いている（図９）．したがって，垂線の分散度は面の曲率を特徴付ける量である．しかし，垂線が面の種々の点にあるのは不便である．この不便さを取り除くために，空間に一つの点Oを選び，その点を通って各垂線に平行な直線を引く．さらに，点Oに中心を持つ，半径１の単位球を考える．上の直線とこの球の交点は，球の上に一つの領域を描く．それを与えられた面の球面投影像という．面の領域が強く歪んでいればいるほど，垂線はいろいろな向きに強く分散することになり，その領域の投影像の面積は確実に大きくなる．球面投影像の面積が領域の曲率に等しいことを示すことができる．例えば，半球の球

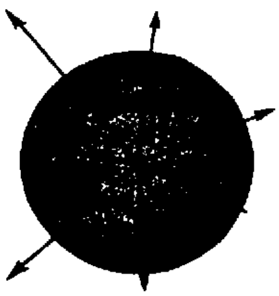


図９

*) この決定には，面を取り巻く空間に出ていくことが必要なことを注意しておく．

面投影像は単位半径の半球であり，その面積は2πである．任意の半球の曲率も2πに等しい．

他方，円筒の曲率は零である．なぜならば，円筒面の垂線は円筒の軸につねに垂直であり，したがって一つの面に平行である（図10）．それらの垂線を点Oに重ねると，すべての垂線は一つの面内にある（例えば，赤道面内に）．つまり，円筒の球面投影像は球上で面にはならず，一本の線になり，その面積はたしかに零である．それゆえ，円筒の曲率も零である．

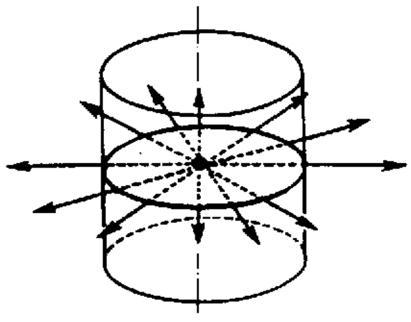


図10

ガウスとリーマン

ガウスの研究によって，面の曲率とはなにか，という問題は最終的に解決した．次の課題は，空間の曲率の尺度をいかに決めるかと言う問題であった．最も優れた数学者の一人であるベルンハルト リーマン（1826-1866）がこの問題を解決した．リーマンはゲッチンゲン大学で学んだが，そこの基礎数学講座の教授はガウスであった．当時，ガウスは一般には近寄りがたい偉人であったが，教育にはあまり熱心でなかった．それに加えて，はっきりしない理由で，この若い学生と著名な教授の関係は理想的なものからは程遠いものであった．そして，重なる歳月のうちに，ガウスはリーマンに対して大きな偏見を持つようになってしまった．

それにも拘らず我々は，リーマンがガウスの弟子であり，その上ガウスの最も奥深い思想に到達し得た唯一の弟子であった，と考えざるを得ない．リーマンの多くの研究には，ガウスとの精神的な親近さ，内的接触が感じられる．それは，リーマンの使う記号の幾つかが，ガウスが自分の非公開の（したがってリーマンの知らない）研究で使ったのと同じになる程のものであった．

空間の曲率の問題は，1854年にリーマンによってなされた就職講演で発表された．当時ドイツの大学には，良い慣行があった——就任した教師は学部のメンバーに講義をして，彼の教育的適性を認めさせなければならなかった．リーマンは講演のテーマをいくつか提出し，ガウスはその中から，彼に最も興味のあったテーマ——〈幾何学の基礎にある幾つかの仮定について〉を選んだ．リーマンの教育的才能について聴衆はあまり高い評価を与えたとは思えない——講義の内容を理解できたのはガウスだけだった．

空間の曲率

空間の曲率とは何であり，それはどのように測られるかという問題に，リーマンはどんな答えを出したのだろうか？　彼は，ガウスが面の曲率を測るのに用いたのと同じ方法——測地線の一部を辺とする三角形の内角の和を計算し，それが π からどれだけずれているかを求める方法を使った．しかし，そのとき困難が生ずる——空間では一点を通る多くの面を考えることができ，曲率は考えている点の位置にだけではなく，どの面に三角形がのっているかにも依存する．それゆえ，リーマンは一点の，ある方向の面の曲率を定義した．

もし，ある空間内のすべての三角形に対して内角の和が π に等しければ，その空間は確かに普通のユークリッド空間である．そのような空間は曲率を持たず（曲率が0で）平らである，といわれる．もし，三角形の内角の和が π より大きければ，その三角形を含む面の方向の，その点における曲率は正である；もし，内角の和が π より小さければ，曲率は負である．

そういうわけで，空間の曲率という概念は何も神秘的なものを含んでおらず，単に三角形の内角の和がユークリッド幾何学の示す値からずれていることを意味するだけである．特に興味のあるのは，すべての点のすべての面の曲率が等しい空間である．この様な空間（それを**一定曲率の空間**という）では，物体は一つの場所から他の場所へ寸法を変えずに移動することができる．もし，空間の曲率が変化すると，物体は移動した時に寸法を変え，歪む．リーマンは実在の空間——そこに我々が住んでいる——が歪んでいるかどうかを問題にした．

リーマンの時代には，物理学はユークリッド空間とニュートン的概念とに矛盾する現象をまだ知らなかった．それにも拘らず，彼は次のように述べている：《実在の物質に作用する結合力によって，何か未知の距離関係が生ずる可能性を説明することを試みる必要がある……ここでわれわれは，隣接するもう一つの科学——物理学との境に立っており，現在はその理由が分からないが，その境界を跨ぐことが必要とされている．》

実在の空間が曲率をもっていることを，どのように知ることができるのだろうか？　そのためには，その空間の測地線——最短線を見つけなければならない．物理的な研究の結果，光はつねに通過する時間が最も短い経路を伝搬する，ことが分っている．他方，真空中の光の速さは常に一定である．それゆえ，空間の二点を結ぶ測地線は，一方の点から他方へ光線が（真空中で）伝わる経路である，ことが明らかである．

したがって，空間の曲率は，光線で作られた三角形の内角の和を測ることによって，簡単に知ることができる．しかし，頂点が星にある三角形を取っても，測定精度の範囲内で内角の和と π との差が見いだせず，たとえ空間が全体として歪んでいるとしても，その曲率は非常に小さいことが分った（このような方法で実在空間の非ユークリッド性を示す試みは，ガウスおよび偉大なロシアの幾何学者 N. I. ロバチェフスキーによって試みられたが，成功しなかった）．

アインシュタインが，引力をもった質量の近くだけに測定にかかる程度の空間の曲率が存在することを示すことによって，初めて，空間の曲率の実験的証明は成功した．それは1919年に皆既日食の観測の際になされた．

空間の歪みのもう一つの証拠は，太陽系の惑星の一つである水星の観測によって与えられた．この惑星は他の惑星より太陽の近くにあり，したがって，太陽の周辺の空間の歪みの影響を最も強く受ける．この歪みのために，太陽の周りを水星が一周したとき，その軌道は，ちょうど球上で閉曲線にたいする平行線分が旋回するように，少し回転する（図11）．しかし，軌道は他の原因——他の

（P.54へつづく）

（P.48からつづく）
惑星の引力——によっても回転する．引力による軌道の回転は，天文学者によって計算された．し

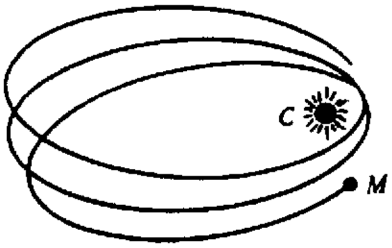


図11

かし，その計算は実際と合わなかった——軌道の回転は100年に角度41秒だけ計算より速かった．アインシュタインの公式を使って，空間の曲率による軌道の回転を計算すると，結果は100年に41秒であった．これは長い間天文学者たちを悩ませてきた謎を解決すると同時に，それがアインシュタインの相対性理論と一致することによって，その理論を確証するものであった．

宇宙論の研究においては，星雲や全宇宙の引力によって引き起こされた空間の歪みが考慮されねばならず，空間の曲率が問題になる．それに関連して，宇宙論の基本問題の一つ——実在の空間は有限か，無限か——が提起される．空間が歪んでおり，その曲率が正であると，その空間はおよそ三次元球のような形をしており，したがって，境界はなく，有限の大きさを持つ．ある人々は実在空間が有限である可能性自体を否定している．しかし，彼等の論拠は，ヤルメス人が有限の球にではなく，無限の平面に住んでいると論証した理由付けより説得力がある，というものではない．この問題に対する答えは，観念的な体系によってではなく，天文学的研究によって為されるべきである．特に，宇宙における物質の平均密度の正確な測定が，決定的な役割を演ずるだろう．

（訳　こじま ひでお）