# ソ連科学誌・クヴァントから やさしい物理学 ⑱

小島　英夫（静岡大学）訳



## 1. 波の方程式　I.K. ベルキン (1984, No. 11, pp. 27〜28)

波は，よく知られているように，振動が空間を伝搬する現象である．媒質中を波が伝搬しうるためには，媒質の各点が互いに何らかの力で結ばれていなければならず，それは振動を励起するものであり，弾性的な力である．図1には，そのような力で互いに結ばれた，一連の点が描かれている．もし，そのうちの一個，たとえば点$O$が振動($X$方向への)を始めると，その振動は$r$方向へ伝えられる．

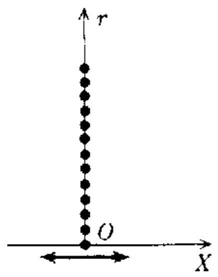



図1

点$O$が，$X$軸に沿って，式

$$x=x_m\sin\omega t \tag{1}$$

に従って振動するとしよう．ここで，時間$t$は，点$O$が平衡位置にある時刻から測ることにする．点$O$の振動は他の点に伝えられるが，その過程は瞬間的に起るのではなく，ある速度$v$で伝わる．つまり，振動は単位時間後に点$O$から距離$v$だけ離れた点に達する．振動の周期$T$に等しい時間内に，振動が伝搬する距離を**波長**$\lambda$と呼ぶ．したがって，次の関係が成り立つ：

$$\lambda=vT.$$

または，$T=1/\nu$であるから（$\nu$は振動数）

$$v=\lambda\nu.$$

われわれの点列（図1）の中の任意の一点は，そこに波が到達するや否や，点$O$と同じ振幅で振動を始め，その振動をくり返す．しかし，反復の過程は少し遅れる——というのは，点$O$から$r$だけ離れた点まで波が達するには，$r/v$に等しい時間がかかるからである．それゆえ，点$O$から距離$r$の点の$x$座標は，

$$x=x_m\sin\omega\left(t-\frac{r}{v}\right) \tag{2}$$

と書かれることになる．式(2)は**波の方程式**と呼ばれる．この式は，任意の時刻における，任意の点（任意の距離$r$だけ離れた点）の平衡位置からの変位$x$を与える．与えられた時刻に対して，この式は，すべての点の位置の，$X$軸への射影を与える．波の方程式は，すべての点が，実質的に同じ振動をすることを示している（すべての点は，$X$軸に平行に振動し，その振幅と振動数とは同じである）．違いは，振動の位相だけで，距離が$\Delta r$だけ離れた2点の振動の位相の差は$\omega\Delta r/v$である．

波の方程式は，少し違った形に表す方が都合のよいことがある．式(2)を次の形に書き換える：

$$x=x_m\sin(\omega t-\omega r/v).$$

括弧内の第2項において，波の速さ$v$を，それに等しい量$\lambda\nu$で，$\omega$を$2\pi\nu$で置き換える．すると次の式を得る：

$$x=x_m\sin(\omega t-2\pi r/\lambda). \tag{3}$$

この表式から次のことが分かる；波の源から任意の距離$r$だけ離れた点の変位$x$は$r/\lambda$に依存し，この量は距離$r$に含まれる波長の数（波数）である．例えば，$r=\lambda$であると，位相の遅れは$2\pi$となる．すなわち，その点の振動の位相は点$O$におけるものと同じになる．まったく同じことが，$r=2\lambda, 3\lambda, \cdots$において起り，そこでの位相の差は$4\pi, 6\pi, \cdots$となり，それらの場合に位相はいずれも同じである．このように，波の波長の2倍，3倍，あるいは一般に波長の整数倍だけ離れた2点は，同じ位相で振動する．

波の方程式(3)により，二つの波の干渉の場合に，振幅が極大および極小になる条件を，容易に求めることができる．空間の任意の一点に二つの波がやってきて，それぞれがその点に振動を起させるときに，干渉という現象が生ずる．それゆえ，二つの波が“出会う”点は，二つの振動に関与する．二つの振動を合成した結果は，加え合せる振動の位相の差に依存することは明らかである．

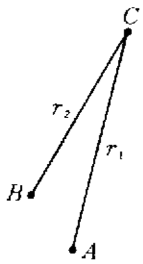

図 2

ある点$C$に，$C$からの距離が$r_1$と$r_2$である2点$A$と$B$を源とする，二つの波が到達するとしよう(図2)．すると，点$C$では一つの軸（例えば$x$軸）に平行に起る，次の二つの振動が加え合される：

$$x_1 = x_{m1}\sin(\omega t - 2\pi r_1/\lambda),$$
$$x_2 = x_{m2}\sin(\omega t - 2\pi r_2/\lambda).$$

これらの振動の位相の差は，

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2)$$

である．それゆえ，強め合う（極大）条件は，次のようになる：

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = 2\pi k,\ (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

これから，振動は波が“出会う”までの行路の差$r_1 - r_2$が，

$$r_1 - r_2 = k\lambda = 2k\cdot(\lambda/2),$$

すなわち，半波長の**偶数倍**に等しいとき強め合う（すなわち，合成振動の振幅は，加え合せる振動の振幅の和になる）．それに対応して，極小の条件は次のようになる：

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = (2k-1)\pi,\ (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

または，

$$r_1 - r_2 = (2k+1)\frac{\lambda}{2}.$$

すなわち，波の行路の差が半波長の**奇数倍**に等しいとき，振動は弱め合う（合成された振動の振幅は二つの波の振幅の差に等しい）．

## 2．フェルマーの原理

(1984, No. 1, pp. 36〜38)

“光線”の考え方を用いる幾何光学の基礎には，三つの法則がある——光の直進，反射および屈折の法則である．

これらの法則が認識されはじめた時代には，光の本性は未だ問題にならなかったので，“光線”の概念には何も実際に物理的なものは含まれていなかった．

19世紀の20年代に，光が波であることが明らかにされた．光線は，波面に垂直な単なる直線で，光の波が伝搬する方向を示すだけのものになった．波の概念に基づいて，光の反射と屈折の法則が容易に導びかれた．これは教科書にも書かれていることである（なお，本誌1993年4月号“ハイゲンスの原理”も参照のこと）．しかし19世紀末から20世紀初頭にかけて，光は単に波であるばかりでなく，また粒子的な性質をも持つことが明らかにされた．粒子的（量子的）性質の観点からは，光は要素的な光の粒子——フォトン（光子）——の流れである．一様な媒質中では，光線はフォトンの運動の軌跡と考えることができる．

しかし，それよりずっと前に，光の伝搬の基本法則のすべてを直接導くことのできる，驚くべき原理が確立していたのは，興味のあることである．フランスの数学者フェルマー（Pierre de Fermat, 1601-1665）によって発見されたこの原理は，次のように表される：**2点間のすべての可能な経路の中で，光は通過時間の最も短い経路をたどる．**

フェルマーの原理（この原理はそう呼ばれる）から，一様な媒質中では（そこでは，光の速さがどこでも同じであるが），光は直線的に伝搬することが導びかれる：直線は2点間の最短距離であり，したがって伝搬時間は最も短い．

つぎに，光の反射の法則が，フェルマーの原理から直接導びかれることを示そう．

**光の反射の法則**　図1において，$MM$を平面鏡とする，点$A$に光源があり，鏡で反射されて点$A$から点$B$に達するのに，光はどのような経路をたどるかを考える．図には，可能な経路のうちの3本，$AA'B$，$ACB$および$AB'B$を描いてある．このような光の“ルート”は，数限りなく描くことができる．それらは長さが違い，したがってそこを通過するのに要する時間も違う．その違いは，光線が鏡のどの点に入射し，反射され，$B$

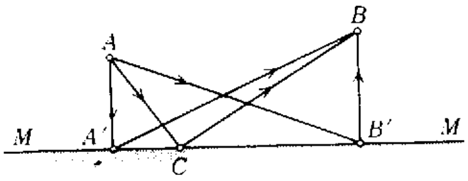


図1

に向うかに依存している.

簡単な幾何学的考察により,点$A$—鏡—点$B$のルートを通過する時間が最小になるためには,光線はどこに当らなければならないかが容易に分かる.図2に,可能なルート(の一つ)$ACB$を示した.点$B$から鏡$MM$に垂線$BO$を下し,その延長上に$B'$をとり,鏡からの距離が$|OB'|=|OB|$となるようにする.直線$CB'$を引く.得られた3角形$COB$と$COB'$とは合同である.それらは直角3角形で,辺$OC$を共有し,$|OB|=|OB'|$だからである.したがって,$|CB|=|CB'|$であり,光線の経路の長さ$ACB$は,$A$から光線が鏡に当る点$C$までの長さと,その点$C$から$B$までの長さの和である.明らかに,この和は点$A$と$B'$とを結ぶ直線上に点$C$があるときに最小になる(図3).このとき,長さ$|AC|$と$|CB|$の和,すなわち光の全経路の長さも最小になり,光がその経路を通過する時間は最小になる.

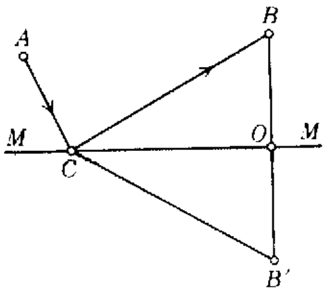


図2

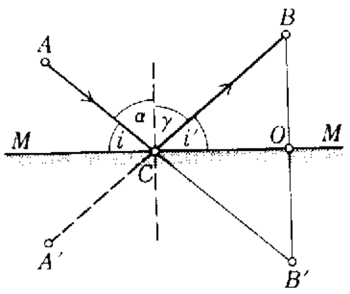


図3

図3から分かるように,$\angle BCO=\angle B'CO$(3角形$BCB'$は2等辺3角形で,$CO$は頂角の2等分線である)であり,また$\angle B'CO=\angle ACM$である.すなわち,入射光線と反射光線が鏡にたいしてつくる角度は互いに等しい.これが光の反射の法則である.しかし,ふつう入射角と反射角は鏡面から測るのではなく,入射点で鏡面に立てた垂線から測る.しかし,角度$i$と$i'$とが等しければ,角度$\alpha$と$\gamma$も等しい(図3).反射の法則は,ふつう次の形に書かれる:

$$\alpha=\gamma.$$

この法則は,以上に見たように,光が最短時間で辿る経路を"選ぶ"結果である.フェルマーの原理から,入射光,反射光および入射点で鏡に立てた垂線が,いずれも同一面内にあることを示すのは難しくない.もしそうでないと,経路は長くなり,より長い時間が必要になる.

鏡による反射に関連した,もう一つの重要な特徴に注意しておこう.もし点$A$に光源があり,点$B$に眼があったとすると,眼は光源が$A$にではなく$A'$にあり,鏡はまったく存在しないように受けとる(図3).もし鏡をとり去り,光源を$A$から$A'$に移すと,眼はその変化を識別できない.

**光の屈折の法則**　フェルマーの原理から,光(正確には光線)の屈折の法則を導くことができる.話は,一つの媒質(図4の媒質$I$)から他の媒質(媒質$II$)へ,それらの境界を通って光が通過する場合のことである.媒質が違うと,その中を伝搬する光の速さが違うことになる.

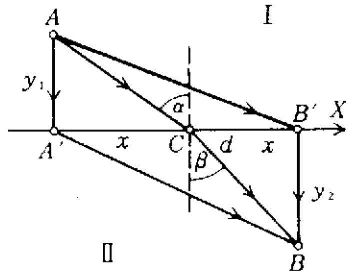


図4

ここでは,媒質$I$が真空でそこでの光速度が$c$であり,第2の媒質$II$は何らかの透明な物質(例えば,ガラス,水など)であるとし,そこでの光速度が$v$で,$v$は$c$より小さい($v<c$)としよう.媒質$I$の中の点Aと媒質$II$の中の点$B$の間には,無数の仮想的な経路が存在するが,フェルマーの原理により,光はその中から,通過するのに最小の時間を要するものを"選ぶ".明らかに,例えば経路$AA'B$(図4)はそのような経路ではない.なぜならば,この場合,光は速度の大

きい媒質中で短い（最短の）距離を通過し，速度の小さい媒質中で長い距離を通過する．それでは，経路 $AB'B$ はどうだろうか？　この場合，光は速度の小さい媒質中で最短の距離を通過し，速度の大きい媒質中で長い距離を通過する．しかし，時間の経済という意味で，本当にこの経路が最適だろうか？　たぶん，最適なのは媒質 $II$ の中の経路を少し長くし，媒質 $I$ の中の経路を少し短くしたものではないだろうか？　要するに，$A$ から $B$ に達する時間が最も短くなるには，どの点で光が二つの媒質の境界を横切るべきかを見出すことが必要である．明らかに，その点は $A'$ と $B'$ の間のどこかである（可能性としては点 $B'$ 自身を含んで）．

$A'$ と $B'$ の間の距離を $d$ としよう．もし，われわれの求める，境界を横切る点 $C$ が $A'$ から $x$ の距離にあれば，それは $B'$ から $d-x$ の距離にある（図4）．光が媒質 $I$ の中で辿る経路 $AC$ の長さは $\sqrt{y_1^2+x^2}$ に等しく，その経路を通過するのに必要な時間は

$$t_1=\sqrt{y_1^2+x^2}/c$$

である．光が媒質 $II$ の中で辿る経路 $CB$ の長さは $\sqrt{y_2^2+(d-x)^2}$ に等しく，その経路を通過するのに必要な時間は

$$t_2=\sqrt{y_2^2+(d-x)^2}/v$$

である．全体の時間 $t$ は，次の式で与えられる：

$$t=t_1+t_2=\sqrt{y_1^2+x^2}/c+\sqrt{y_2^2+(d-x)^2}/v. \quad (1)$$

時間 $t$ は，光線が境界に入射する点の座標 $x$ だけに依存する．なぜならば，量 $y_1, y_2, c, v$ および $d$ は定数で，$x$ の値を変えても変化しないからである．ここで，$x$ のどのような値にたいして，$t$ が最小になるかを見出さねばならない．ふつうの代数学でこの問題を解くことはできない．この問題を解くには，$t$ が最小になる $x$ の値で，式(1)の右辺の導関数が0になる，ということを利用する*)．

これをつかうと，$x$ に対する次の条件式が得られる：

$$\frac{x}{c\sqrt{y_1^2+x^2}}=\frac{d-x}{v\sqrt{y_2^2+(d-x)^2}} \quad (2)$$

図4から分かるように，

$$x/\sqrt{y_1^2+x^2}=\sin(\angle A'AC)=\sin\alpha$$

$$(d-x)/\sqrt{y_2^2+(d-x)^2}=\sin(\angle CBB')=\sin\beta.$$

ここに，$\alpha$ は入射点における境界面の垂線と入射光線のなす角（入射角）で，$\beta$ はその垂線と屈折光線のなす角（屈折角）である．それゆえ，条件(2)は次の形に書ける：

$$\sin\alpha/c=\sin\beta/v,$$

または

$$\sin\alpha/\sin\beta=c/v.$$

これは今考えている場合にたいする屈折の法則である：入射角の正弦（サイン）と屈折角の正弦（サイン）の比は，真空中とそれに境を接する媒質中の光の伝搬速度の比に等しい．比 $c/v$ は，考えている媒質に特有の定数であり，その物質の**屈折率**と呼ばれ，記号 $n$ で表される（$n=c/v$）．したがって，

$$\sin\alpha/\sin\beta=n.$$

光の速度が $v_1$ の透明な媒質（屈折率 $n_1$）から，$v_2$ の透明な媒質（屈折率 $n_2$）へ光が進む，一般の場合には，屈折の法則は次の形になる：

$$\sin\alpha/\sin\beta=v_1/v_2=n_{21}.$$

ここで，$n_{21}$ は媒体2と媒体1の**相対屈折率**である：

$$n_{21}=v_1/v_2=(c/v_1)/(c/v_2)=n_1/n_2.$$

フェルマーの原理は，われわれがここで考察した，光の反射と屈折のような，最も簡単な場合だけに成り立つのではない．この原理をつかって，プリズム，レンズ，および任意のプリズム，レンズおよび鏡からなる複雑な系における光の経路を理解し，正確に計算することが可能となる．

（訳　こじま　ひでお）

*) $t=t(x)$ の導関数は，二つの場合に0になる．それは，関数が極値をとるときと，$x$ にまったく依存しないとき（関数が定数のとき）である．ここでわれわれに興味があるのは，最小の場合である．しかし，実際の光の経路は，極小か，極大か，定数（可能な経路のすべてが同じ）かであり得る．定数と極大の経路は，例えば，曲面による光の反射の場合に見られる．そういう訳で，フェルマーの原理は，フェルマー自身が最初に考えたよりも一般的に定式化される．