

小島 英夫 (静岡大学) 訳

Japanese translation rights arranged with VAAP through  
Japan Soviet Copyright Center, Tokyo.

## ビリヤード球の気体 G. L. ユトキン (1989, No. 6, pp. 2~7)

コンピュータの科学と技術における多くの応用との中で、最も重要で広く知られているものの一つは、シミュレーションである。飛行機、海流、衛星の運動、各国間の経済的関係などのコンピュータ・モデルがつくられている。

この論文では、最も簡単な気体のモデルの一つについて話すつもりである。それは“理想ビリヤード球”である：完全に滑らかで弾性的な球が気体の分子の役割を、玉突台の側壁が容器の壁の役割をし、台の表面は完全に滑らかである。そのような理想ビリヤードは存在しないが、コンピュータをつかってそれを“創り出す”ことができ、グラフィック・ディスプレイの画面上で、球の“一生”を研究することができる。

“理想ビリヤード”は、非常に単純化した気体のモデルの性質を示すことができる。コンピュータを使えば、原理的には、もっと現実的なモデル——平面上だけでなく、3次元空間における球の運動に移行すること、球—分子の相互作用を導入すること、など——を“構成する”こともできる。しかし、“ビリヤード”は、高校生の学習対象であるばかりでなく、真剣な科学的研究の対象でもある。

明らかに、理想球の運動は、力学の法則により決定される。しかしながら、気体を構成する粒子の運動は、混沌とした、ランダムなものとして考察することができる\*1。

\*1 球の気体に“分子的混沌”が生ずる情況は、ロシアの物理学者 N. S. クレイロフにより研究された(1950年)。数学者 Y. G. シナイは、数学者を満足させる厳密さで同じ問題を研究した(1963年)。“球の気体”のコンピュータ・モデルをつかった科学的研究は非常に多い。

この論文では、“理想ビリヤード”のモデルをつかった実験について語り、運動がどのようにランダムになるか、“分子的混沌”の生ずる原因は何か、を研究する。

## 運動の計算のアルゴリズム (計算手段の体系)

数個の球の運動は、それほど難かしくない、実際、それらの球の運動は、すべて直線的で一様な運動と、球同士および壁との衝突とになる。確かに、計算は全体として膨大なものになるが、コンピュータにとっては、それは問題にならない。

次のような計算の手順を考えよう。初期データとして、すべての球の最初の位置と速度とを与え、各球の一つの壁との衝突の時刻を計算する(他の球および他の壁から生じうる妨害は考えずに)。それから、各々の“孤立した”球のペアが衝突する時刻を計算する(同じく妨害を考えずに)。次に、そのすべての衝突の中で最も早いものを選び出す：それは、他の衝突の影響を受けないので、確実に起る。そこで、その最初の衝突の時刻におけるすべての球の位置と、衝突した二つの球(あるいは壁と衝突した球)の衝突直後の速度とを計算する。それが新しい計算の初期データとなる。同様の計算を繰り返す。

球の位置は、球の中心のデカルト座標で、球の速度は、速度の座標軸への射影(成分)をつかって表される(図1)：

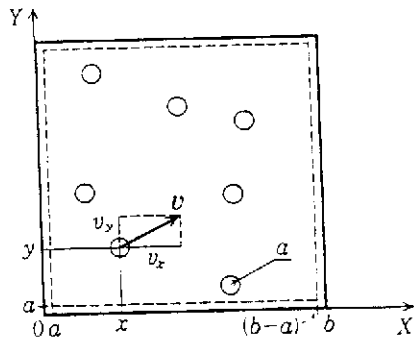


図 1

$$\vec{r} = (x, y), \quad \vec{v} = (v_x, v_y).$$

計算のための公式は、まったく簡単である。Y軸を、玉突台の左の側壁に一致させよう。すると、球がこの側壁と衝突するまでの時間は、球の半径を  $a$  として、

$$t = -\frac{(x-a)}{v_x}$$

で与えられる。これは  $v_x < 0$  のときにのみこの衝突が起ることを意味する。この衝突が、最も早い衝突であるとしよう。この衝突によって射影  $v_y$  は変わらないが、射影  $v_x$  は符号を変える：

$$v_x \rightarrow -v_x, \quad v_y \rightarrow v_y.$$

各々の球 ( $i$  で指定) の時刻  $t$  における位置は

$$\vec{r}_{it} = \vec{r}_i + \vec{v}_i t.$$

すなわち、 $x_{it} = x_i + v_{ix} t$ ,  $y_{it} = y_i + v_{iy} t$ 。球同士の衝突の場合の計算は、少し複雑ではあるが、まったく“演習用”である。自分でやってみることをおすすめする (この論文の最後にある問題を見よ)。

N個の球の運動をグラフィック・ディスプレイ上でシミュレーションするための完全なプログラムの説明は、論文“ディスプレイ上の気体” (本誌、次回の本欄に掲載予定) に与えられている。

同様な方式での演算速度はどの位だろうか？ 国立ノボシビルスク大学の物理学教室における学生実験用コンピュータは、画面上の1コマをアニメ映画と同じ位の速度で変えることに成功した (もし球の数が10個以下のとき；球の数が増えると、“アニメ”の各コマの計算時間は急速に増大する\*)。

われわれの計算は、すべて有効数字7~8桁で行った。

\* 計算はコンピュータ“エレクトロニカ-60”で行った。これは“ターミナル高等教育システム” (TEVUS 国立ノボシビルスク大学開発) に連結されている。

## 最初の実験

このようにして、われわれは“気体”を持っており、その気体をつかって種々の実験ができる (それを設定し、実行するためには、コンピュータの計算結果を用いる)。

まず第一に、球が“規則通りに”動くかどうか、を確かめる実験を行う。見たところ、規則通りらしい。エネルギー保存則が成り立つことを確かめるのは容易である： $\sum v^2$  は一コマ毎に一定になっている。

今度は、次のような実験をする。ある時間  $t_0$  の間、球を運動させる。それから、すべての球の速度を同時に逆転させる： $\vec{v}_i \rightarrow -\vec{v}_i$ 。球は逆向きに動きはじめ、 $2t_0$  経ったとき、初めの位置に戻るはずである。今考えている気体に対しては、これは何かあり得ないことかもしれない：ランダムな状態から、自然に、規則状態が生ずるだろうか？ (気体運動論の基礎を築いたし、ボルツマンが、そのような (思考) 実験を指摘されたとき、彼は答えた：“速度を反転させて見せてくれ給え……”。しかし、コンピュータには、それが可能なのである)

図2には、そのようなコンピュータ実験の結果が示されている。“順”方向の軌跡は、スクリーン上の太い線で、“逆”方向の軌跡は細い線で描かれている。太い軌跡はすべて細い軌跡と重なることが期待された。ところが、球はある時刻から、はじめは1個が、それから残りも、軌道から“ずれ”て、初めにやって来たのとはまったく違う方向へ動いていく。このように、球の運動は“不規則”である。なぜだろうか？

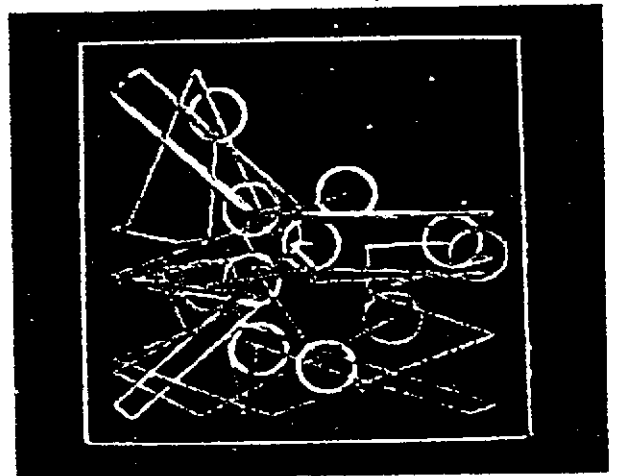


図 2

計算は正確な公式に従って行われたのだから，“不規則性”の唯一の可能な原因は，計算の途中での数値の丸め（最小桁への四捨五入，切上げ，切捨てなど）である。しかし，丸めに関係しなずれば，相対値  $10^{-7} \sim 10^{-8}$ （すでに述べたように，コンピュータは有効数字 7～8 桁で計算している）であるのに，スクリーン上では，時間  $2t_0$  のとき，球は自分の初めの位置を完全に“忘れて”いる。この“忘れっぽさ”を，丸めで説明できるだろうか？

### ずれの評価

定量的な評価をするために，球のうちの 1 個の運動方向が，丸めのために角度  $\varphi_0 \sim 10^{-7}$  だけずれ，それから先の運動は正確に計算されるとしよう。

まず，球が 1 個だけあり，壁との衝突の際にずれが起った場合を考える。球の中心の軌跡を図 3 に描いた。そこでは計算を容易にするために，区画を拡張するという簡単なトリックを用いた。一边  $(b-2a)$  の正方形が球の中心の動くことのできる領域である ( $b$  は玉突台の辺の長さ)。軌跡  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow \dots$  の長さは，線  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3' \rightarrow 4' \rightarrow 5' \rightarrow \dots$  の長さに等しい。もし，点 1 で  $v_x$  の値の丸めの結果として，衝突後の球の速度の方向が，正確な方向から角度  $\varphi_0$  だけずれたとすると，長さ  $L$  の軌道では，球の中心のずれは距離  $\Delta = L\varphi_0$  に“積算される”。壁との衝突回数が  $\nu_1 = 1000$  回となるような時間  $T$  を選ぶと，ずれとして  $\Delta_1 \sim \nu_1 b \varphi_0 \sim 10^{-4} b$  ( $\varphi_0 = 10^{-7}$  として)。われわれのグラフィック・ディスプレイでは，スクリーン上の線の幅は約  $0.004b$  である。したがって，時間  $T$  の後にずれの積算値は認められない——それはスクリーン上の線の幅より小さい。例えば，球の直径  $2a$  は目に見える距離であり，球の中心は  $\nu_2 \sim 2a/b\varphi_0$  回の衝突で  $2a$  だけずれる。それだけの回数の衝突を壁とする時間は 100 時間 (!) となる。

明らかに，壁との衝突を計算するときの丸めでは，われわれの実験における球の運動の“不規則性”を説明することはできない。

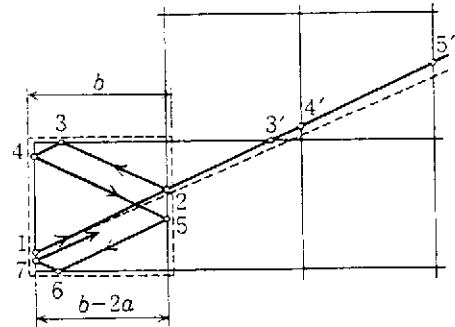


図 3

つぎに，球の相互衝突の計算のときの丸めが，どのように影響するかを考察しよう。ここでも，1 個の球の運動方向は，角度  $\varphi_0 \sim 10^{-7}$  だけ，正確な方向からずれると仮定し，相互衝突のときにずれの角がどのように変化するかを計算しよう。そのとき，最も粗い評価でがまんすることにする。

衝突の間に，球はまっすぐに動き，平均距離  $l$  を移動すると考える。 $l$  は球の半径  $a$  より非常に大きい ( $l \gg a$ )。継起する二つの衝突の間に，球の中心は距離  $OO' \sim l\varphi_0$  だけずれる (図 4)。衝突の際の二つの球の接点のずれも同程度である。第二の球の表面の接触点の近くの部分は，衝突の際に“鏡”の役割をする。この“鏡”自身が衝突までに移動し，衝突の際にはね返される。それゆえ，第一の球がはね返される方向は，“入射角は反射角に等しい”という法則では決められない。その代り，“鏡”が小さな角  $\alpha$  だけ回転すると，はね返る球の運動方向の変化  $\varphi_1 \sim \alpha$  が生ずる (恐らく，1.5～2 倍は大きいかもしれない——この程度の精度は，今の場合許される)。したがって，

$$\alpha \sim AA'/a \sim l\varphi_0/a.$$

これから，

$$\varphi_1 \sim (l/a)\varphi_0 \gg \varphi_0.$$

多数の衝突によって，速度の方向のずれは著しく増加する。 $k$  回の衝突の後には

$$\varphi_k \sim (l/a)^k \varphi_0.$$

もし， $l/a \sim 10$  とすると， $\varphi_k \sim 1$  となるには，8～10 回の衝突で十分で，そのとき，球の運動の方向は，正しい方向 (誤差のない場合の) と何の関係もなくなる。

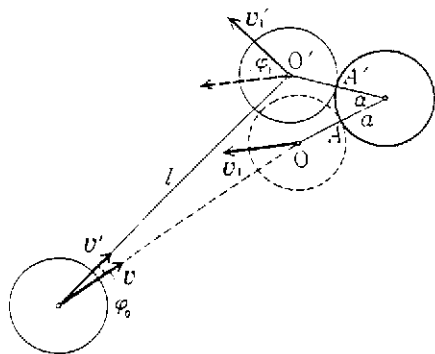


図 4

### 制御実験

ここで行った評価は説得力のあるものに思えるが、それでもコンピュータ実験によってその正しさをチェックすることにしよう。そのために、二つの球をほとんど同じ初期条件で、ただ一方の球の初速度（あるいは初めの位置）を少し変えて、“発射”を反復しよう<sup>\*)</sup>。コンピュータに、任意の一つの球の座標を、同じ時間間隔  $\Delta t$  ごとに記憶するよう“注文”する；第二の発射の際に、同じ球の  $t_k = k \cdot \Delta t$  における座標に注目し、それからその球の軌跡のずれ

$$\Delta r_k = \sqrt{(x_k - x'_k)^2 + (y_k - y'_k)^2}$$

が、時間とともにどのように変化するかを決める。ここで  $x_k, y_k$  は第一の発射の時の時刻  $t_k$  における座標の値で、 $x'_k, y'_k$  は第二の発射のものである。予想される依存性を考慮して、 $\Delta r_k$  軸には対数目盛をつかう。すなわち、その軸に  $\log(\Delta r_k)$  の値をとるのがよい。 $\varphi_k = (l/a)^k \varphi_0$  の形の依存性は、この座標系では直線グラフ

$$\log(\Delta r_k) \sim \log \varphi_0 + (t_k / \Delta t) \log(l/a)$$

となるに違いない。

実験の結果を図5に示した。同一の図の中に、初期条件の種々の変化に対して得られた点列を描いてある。予想されたグラフの直線部が、十分はっきりと見られる。時間  $t$  がたってからの  $\Delta r_k$  の値は、玉突台の大きさで決まる限界値まで増加し、(その時刻を  $\tilde{t}$  とする)、それ以後はランダムに変化する。しかし大体において、対数目盛での  $\tilde{t} < t$  における点は、水平な直線  $\log(\Delta r_k) \sim \log l$  からあまり遠ざからない。

<sup>\*)</sup> まったく同じ初期条件で発射をくり返したとき、計算された運動は正確に再現される、と考えている。

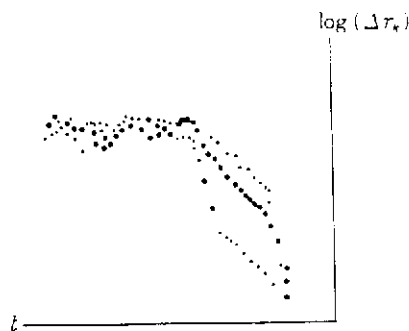


図 5

このコンピュータ実験は、前に行った評価 ( $k=8 \sim 10$  で  $\varphi_k \sim 1$ ) の妥当性を保証している。

### 球の“予測不可能なふるまい”

この研究の結果は、次のような結論を与える：衝突するビリヤード球の運動は、いちじるしく不安定である。明らかに、ここでの本質は計算の近似性にあるのではなく、球の運動の本性にある。この計算の精度は、それを実際の気体分子の運動に適用することを可能とする。ただ、分子に対しては、初めの非決定性は、あらゆる乱れから生ずるもので、それ以後のすべての関係式では無視することができる(その乱れは、例えば他の町で起った雷の電場、あるいは目の前を飛んでいる蠅の影響などであり得る)。われわれは、次のように結論してよいだろう：球(あるいは分子)の運動は、短い時間間隔に関しては完全に合法的であるが、長い時間間隔に対してはランダム(偶発的)である。

球が壁だけと衝突する場合と、球同士で衝突する場合との、球の運動の性質の違いは、定性的なものと考えられる。第一の場合には、最初の方向の精度を、百万倍良くすれば、正しい道筋に百万倍接近する。第二の場合には、わずかに5~10回の衝突しか改良されない。惑星の運動がそれ程不安定であったとすると、われわれの知らない何らかの小惑星の影響で、惑星は数年で識別できない位に軌道を変えてしまうだろう。

しかしながら、惑星の運動は数千年の先まで計算できる。過去になされた運動の計算は、非常によく観測と一致する。例えば、古代バビロニア人の計算がそうである。このような天体力学の成功は、19世紀に形成された、世界に関する一つの見

解に基礎を与えた。その見解は、フランスの著名な天文学者・数学者・物理学者であったラプラスによって、次のように言い表されている：“ある瞬間に自然を動かしているすべての力と自然を構成するすべての部分の相対位置を知っている知的生物が、さらに莫大な物体の運動を一つにまとめて、それらのデータを解析する能力を持つだけ十分に有能であったとしよう。世界は最も軽い原子の運動と同様に、彼にとって不確実なものは何もなく、未来は過去と同様に、彼の視野の前に姿を現すだろう”。

科学と実践は、このような理想的な、整然とした世界が非現実的であることを示した。その原因は、客観的なランダムさの存在である。われわれが考察した、球の運動の例では（その例は、まったく例外的なものではないことを理解すると）、その根拠の一つは、複雑な（多数の粒子からなる）系の現実の生態においてランダムさが演ずる、非常に重要な役割である。

長期間にわたる、詳細な計算のできない現象の例は、確実に計算できる例よりは非常に沢山存在する。液体または気体の乱流、惑星上の天候を決定する大気の運動など、数え上げようとするときえ絶望的である。

### 統計的な記述の可能性

そういう訳で、球—分子の運動は、ランダムなずれのために分子的混沌に陥る。しかし、発生した混沌の中に、固有の法則性が現れる。気体の状態は、平均的な量——温度、圧力——によって特徴づけられることを思い出そう。そして、もし気体が平衡状態にあると、それらの量は一定の値をとる。すなわち、ランダムな因子が多数あるにもかかわらず、系はある種の不変性を示すのである。そして、マクロなパラメータ——温度、圧力のような——は、系の各々の要素の行動を特徴づける量の、最も確からしい値に関係している。

確率的な（統計的な）系の記述の例は、分布関数と呼ばれる関数である。次のようなコンピュータ実験で、その一例にお目にかかる：

$u_x, u_y$  座標面上で、いろいろな時刻における球の速度に対応する点群に着目しよう。それらの点は“雲”をつくり、その中の点の密度  $n(u_x, u_y)$

は、“雲”の中の点の数  $M$  を増やせば増やす程、正確に決められる。関数

$$f(u_x, u_y) = M^{-1} n(u_x, u_y)$$

は、 $M$  が非常に大きいとき、一般に  $M$  には依存しなくなる。これを速度空間における分布関数と呼ぶ。球の数  $N$  とその全エネルギー  $E$  を変えると、新しい分布関数が得られる。

特に球の数が 2 個の場合には、点は  $u_x, u_y$  面上の、半径  $\sqrt{2E/m}$  の円内に一様に分布する（図 6）。

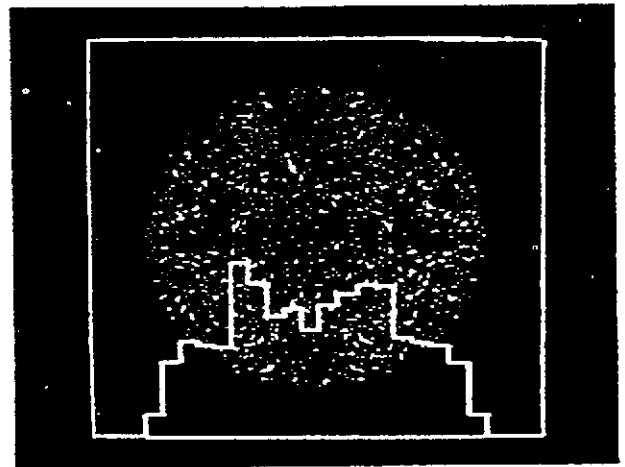


図 6

コンピュータ実験で分布関数を決めるためには、 $u_x, u_y$  面を等しい大きさを持つ小さな格子に分割し、各々の格子の中にある点の数を算える。結果は図 7 にわかり易く示されている。

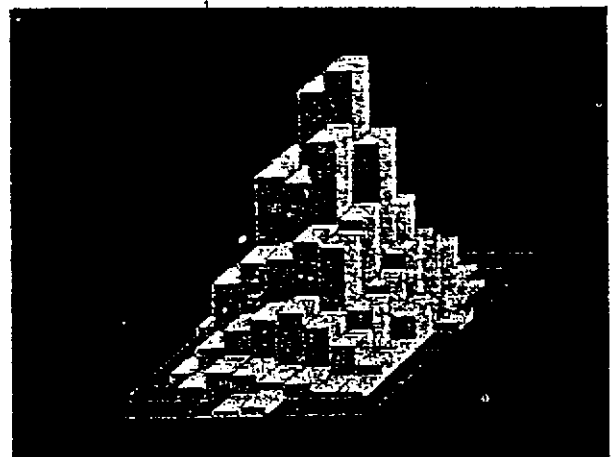


図 7

もう一つの形の分布関数は、速度成分  $u_x$  に関するものである。それは  $u_x, u_y$  面を幅  $\Delta u_x$  のバンドに分け、各々のバンドの中の点の数を算えることによって決まる（図 8）。

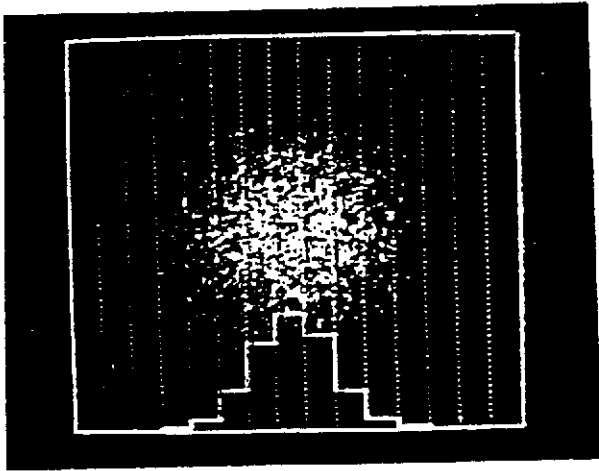


図 8

たしかに、これらのことはすべて、“球の気体”  
の研究の、ほんの手始めに過ぎない。

問 題 (解答は次回のこの欄にのせる)

1. 最初の位置がそれぞれ  $\vec{r}_1=(x_1, y_1)$ ,  $\vec{r}_2=(x_2, y_2)$ , 初速度が  $\vec{v}_1=(v_{1x}, v_{1y})$ ,  $\vec{v}_2=(v_{2x}, v_{2y})$  の半径  $a$  の 2 個の球が、衝突するまでの時間を求めよ。

2. 2 個の同じ弾性球が、速度  $\vec{v}_1$  と  $\vec{v}_2$  で同一直線上を運動していて衝突した。衝突後の各球の速度を求めよ。

3. 2 個の、なめらかで弾性的な、半径  $a$  の同一の球が衝突した。衝突後のそれらの速度を求めよ。衝突する迄の速度は  $\vec{v}_1$  と  $\vec{v}_2$  で、衝突した瞬間の位置ベクトルは  $\vec{r}_1$  と  $\vec{r}_2$  であり、そのとき  $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)^2 = (2a)^2$  である。

(訳 こじま ひでお)