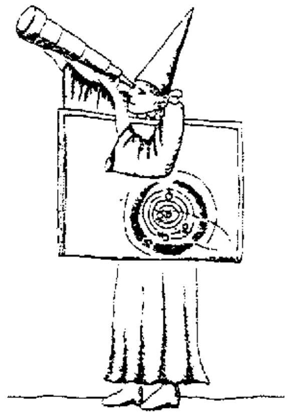
計算をしない計算



A. B. ミグダル (アカデミー会員)／小島英夫 (静岡大学) 訳

もし数学が計算を避ける学問であるとすると，理論物理学は数学を使わずに計算する学問である

上にエピグラムとして掲げた文章は，何人かの物理学者と数学者が話し合った結果生れたものであり，少し解説がいるだろう．物理学における最も簡単な計算でさえも，数学を使わないで済ますことはできない．しかし，理論物理学者の，最初の，最も重要な段階における仕事は，現象の物理的な特徴を表す見取図を作り上げることであり，数学は背景に退いて，補助的な役割を果すにすぎない．しかし，物理学と数学の関係について語る前に，理論物理学とは何かを明らかにしておこう．

I　物理学者の仕事のやり方

実験家と理論家

物理学者には，二つのタイプがある——実験家と理論家である．おまけに，この二つの型の物理学者の仕事が，一人の人間により同時になされることは殆んどない．実験物理学は，物理量の間の関係を研究すること，あるいは，より公式的に言えば，実験装置を用いて，すなわち道具をつかって物理量を測定し，それらの量の間の関係を導くことにより，自然の法則を発見することである．そのためには，研究する現象を深く理解しなければならない(何を，どのように測定するか，を知るために)．理論物理学は，紙と鉛筆だけをつかって，研究対象の量の間の新しい関係を導き，それ迄に実験的あるいは理論的に見出された自然の法則にもとづいて自然を研究する．二つの仕事がこのように分れる原因は，その各々が，独自の特別な知識を必要とする—— 一方は測定方法の知識であり，他方は数学的手段の応用能力である——ばかりではない．主な原因は，それらの仕事が，異なる想像力の性格と異なるタイプの直観とに対応することである．直観は，正しい方法を無意識に見出す方法であり，特に研究の最初の段階では，最も重要な役割を演ずる．残念なことに，直観の能力は瞬間的に得られるものではなく，多くの科学的な問題を解いた見返りに，絶えざる努力の結果として得られるものである．

理論物理学は，実験物理学よりも一層抽象的な観念を取扱うので，理論物理学者は，より抽象的な直観，ときには数学者の直観に近いものを必要とする．19世紀においては，物理学がそれほど分化していなかったので，多くの物理学者が両方の仕事にたずさわっていた．例えば，あらゆる電磁気現象を記述する方程式系を理論的に導いたJ. C. マクスウェルは実験も行った．また，電磁波の存在を実験的に証明したH.R. ヘルツは，同時に秀れた理論家でもあった．しかし，いずれの場合にも，どちらかの仕事が主であった．それはマクスウェルにとっては理論物理学であり，ヘルツにとっては実験物理学であった．

20世紀における“総合的”物理学者——理論家であり，かつ実験家である——の最も有名な例は，エンリコ・フェルミであった．多くの他の研究と並んで，フェルミは放射性崩壊の理論を創り上げるとともに，自分のグループの研究者と協同して，中性子を照射したときに生ずる放射性元素

クヴァント：1991年3月号　p. 2～10

の実験的研究を世界で初めて行った．

実験にも深くかかわった秀れた理論家のもう一人の例は，アカデミー会員 G.I. ブドケルであった．彼には，理論物理学が優れた技術的アイデアと共存していた．彼はノボシビルスクのアカデミー研究所において，対向荷電粒子線に関する加速器の理論的研究と実際の建設とを指導した．

しかし，これらは稀有な例であり，物理学に関心をもつ若い人々は，二つの仕事のうちのどちらを選ぶかを，自分で決めなければならない．

それでは，理論物理学者の仕事について話そう．

物理学と数学

上に述べたように，理論物理学者の問題は，数学的な計算によって対象とする物理量の間の関係を求めることである．ということは，理論物理学が応用数学の一種だ，ということを意味するのではない．そういう見方は，完全に間違っている．問題の性格についても，問題を解く方法についても，数学と理論物理学とはまるで違っている．

数学においては，数学的厳密さ，すなわち設定された公理系から得られるすべての結論の論理的無矛盾性と，すべての論理的に可能な関係の研究とが，最も重要である．物理学が問題にするのは，すべての知られている実験的および理論的事実にもとづいて，直観に導かれた推理をつかって，厳密な“ゲームの規則”が存在しない世界の，可能なかぎり正確なイメージを作りあげることであり，それは経験によってさらに検証される．したがって，数学者はあらゆる論理的に可能な幾何学のタイプを研究するが，物理学者の方はわれわれの世界に存在する幾何学的関係は何かを明らかにするのだ，と言える．

数学者は，たとえ彼が応用数学の問題，すなわち数学から生じたのでない問題に従事しているときでも，補足的な，証明されていない前提を必要としない問題だけを取扱う．物理学者はというと，いつでも，問題を解くのに不十分なデータしか持たずに出発し，未だ知られていないどんな関係が自然には存在するのかを見分けることが必要とされるような問題を取扱う．その推測には数学的な直観ではなく，物理的な直観こそが必要とされるのである．

物理学においては，異なる前提から出発してまったく同じ結論が得られる，ことにより信憑性をかちとる．そのとき，余分の，論理的には必要でない公理，そのどれもがそれ自体は完全には確実でない公理，を導入する必要が生ずる．それが公理であるための唯一の条件は，それによりあれこれの前提の信憑性の程度を知ることができ，更にそれを検証するためにはどのような前提が必要かを，明瞭に理解できることである．

物理学の何らかの分野が，実験的に厳密に確立されたいくつかの公理に立脚して，すべての結論を導き出すことができる段階に達したとき，その分野は発展しつつある物理科学の一部であることを止め，応用数学あるいは技術の一部に移行する．古典力学は，そのような分野の一つである．

もちろん，物理学の理論の構造を解析すること，すなわち，どのような初期前提から，このあるいはあの結論が得られるかを明らかにすることは，非常に有益である．しかし，そのような公理的方法の要点は，結論の数学的な厳密性と一般性とにあるのではなく，最初の前提の正しい選択と，そのうちのどれが実験的に最も確実に支持されるかを，評価することにある．しかし，そのためには物理学者の直観が必要とされる．そのような場合に，その仕事が数学者によってなされたとすると，彼は確かに，しばらくの間とはいえ，理論物理学者だったのである．換言すれば，ポーランドの風刺家レツの表現によると，彼は，コンゴの住民のために熱い季節の生活規範をつくる，エスキモー人の役割を果す危険を冒したことになる．

かくて，数学と物理学は，違う問題を取扱う学問であり，問題にたいして違う方法で接近する学問である．

数学における結果の信憑性は，論理的厳密性と，すべての論理的に可能な結果の解析によって得られる．物理学では，自然界に存在する可能性のある結果だけが考察され，信頼性は，用いられた仮定の絶えざる検証によって達成される．物理学における数学的厳密性は，不可能で，不必要なぜいたくである．物理学において数学的厳密性を達成することが必要でないのは，伐採地の作業班

A. B. ミグダル (1911～1991)

アカデミー会員 A.B. ミグダルは，1991年3月に80才の誕生日を迎えるはずであったが，その前の月にこの世を去った．彼はかの有名なランダウ学派の一員だった．ミグダルは1939年に初めてランダウに会った．その時ランダウは30才で，彼自身は28才だった．したがってミグダルは，ランダウの弟子というよりは，むしろ共同研究者であり，友人であった．

既にその当時から，ミグダルの名前は伝説と神秘に包まれていた．伝説の一つに，こういうのがある：ランダウが，彼の最も愛する弟子は誰かと尋ねられたとき，彼は答えたという，“ポメランチュクだね．いやミグダルかな…．それにしても彼は本当に怠け者だね！”この言葉には，非難ではなく，驚嘆が込められている．

ミグダルは広い，素人ばなれした趣味の持主だったが，彼の主要な，変らぬ愛は，いつも物理学にあった．彼は情熱的に仕事をし，彼のまわりに集まる学生達の面倒をみていた．A.B. ミグダルを知る人は誰でも，一緒にした仕事とともに，情熱とユーモアと知性にみちた彼との人間的交際を，感謝の気持を込めていつまでも思い出すことだろう．

（原論文の長い著者紹介を，訳者が要約した）

にとって，その仕事をするのに韻文で話をするのが必要でないのと同様である．しかしそうは言っても，理論物理学者は，数学的な手段を自由に扱えることが，すなわち物理学の問題を解くときに有用であることが知られているすべての数学的方法を知り，使うことができなければならない．

II　定性的解析

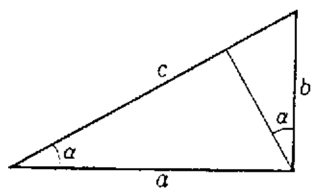
簡単な例をつかって，研究の最初の，最も重要な段階で，提起された問題を定性的に解析するときに，理論物理学者がどのように考察を進めるかを描写してみよう．われわれが知っているように，この段階では問題に現れる量の間の深い関係は，どんな計算によっても得られない．研究の次の段階――数学的手段をつかって，理論的に正確な定量的関係を求める――は，この第一の段階に完全に依存していて，その段階では現象の物理的場景は明らかにされていて，要求される解析の設計図はできている．そのような予備的な設計図なしには，正確な解の探求にとりかかることができない．実際，前もって確信のある見当をつけたときにのみ，証明は成功する．この規則からの例外はほとんどない．

定性的な解析の主な要素の一つは，簡単化したモデルによって問題を解くことである．解けた問題を複雑にするのは，複雑な問題を初めから解くよりも，比較にならぬくらい簡単である．

いくつかの単純な問題をつかって，そこに現れる物理量とそれらの間の可能な関係とを，簡単な次元的な解析で考察することにより，いかに多くの事柄が明瞭になるかを示そう．

次元解析

一例として，ピタゴラスの定理を証明するのに，次元解析を用いる．次元を考えると，直角3角形（図1）の面積 S は，一つの鋭角 α のある関数 $f(\alpha)$ と斜辺の2乗との積と書ける：$S=c^2f(\alpha)$．直角の頂点から下ろした垂線によって二つの相似な直角3角形をつくると，同様な次元の考察により，その面積を表すことができる．それらの3角形の斜辺の役割を，元の3角形の直角をはさむ2辺がそれぞれ演ずる．それゆえ，



$S_\triangle=S_a+S_c, S_\triangle=c^2f(\alpha)$

$S_a=a^2f(\alpha), S_c=b^2f(\alpha)$

図1

$$c^2f(\alpha)=a^2f(\alpha)+b^2f(\alpha)$$

$f(\alpha)$ を約分すると，ピタゴラスの定理が得られ

る.

もう一つの例として，ばねに吊した錘(おもり)の振動周期を見出す問題を考察しよう．まず，どのような物理量が周期の式に現れるかを明らかにする．錘にはたらく力は，重力と弾性力とであるから，振動の周期は自由落下の加速度（重力加速度）g と錘の質量 m およびばねの剛さ（ばね定数）k に依存する，と仮定するのが自然である．もちろん，空気の温度や粘性のような量は，振動の減衰を無視する限り問題に現れない．（問題を簡単にするには，何が無視できるかを知らなければならない！）．量 g, m, および k から，時間の次元をもつ量の組合せが唯一つ決まる——$\sqrt{m/k}$．したがって，周期 T は次のように置ける：

$$T=c\sqrt{\frac{m}{k}}$$

加速度 g は結果に現れない．無次元の定数 c を次元的考察から決定することはできない；ただ言えるのは，それがあまり大きくもなく，かといってあまり小さくもない——1 の程度（オーダー）の量だ，ということである．実際には，われわれがここに示さなかった錘の運動方程式の解から c の値を求めなければならない．そして，物理学に現れる方程式を実際に解いて求めた無次元の定数は，決まったように 1 のオーダーである*)．正確な計算の結果は，c にたいして 2π という値を与える．

このようにして，われわれは，計算しなくても次元解析をつかって，ばねに吊した錘の振動の周期のおよその値を見出すことができた．

一般化の例——振動子

物理学のすべての分野で，平衡な位置のまわりに系が振動するような問題に出会う．したがって，多くの現象を理解する第一段階として，それらの現象を定性的に解析するために，そのような系の一般的性質を知る必要がある．平衡な位置のまわりに振動する系は，その構造に関係なく，振動子と呼ばれる．振動子の最も簡単な例は，ばねに吊した錘であり，数学振子（単振子）である．

*）この主張は，決して一般的な形では証明することができないが，それは実用上いつも正しく，この事実はすべての計算に際して，広く用いられている．

もっと複雑な例は，ピンと張った弦である：この場合には，多くの型の振動が起り得る；中央が唯一の腹になる振動（基音）；1 個の節をもつ振動，2 個の節をもつ振動，など（倍音）．したがって，弦は種々の振動数をもつ振動子の集まりである．同様な例は，オルガンのパイプの中の気柱である；それは最低の振動数（基音）で振動することもあり，より高い振動数で振動することもある．後者の場合には，気柱のいくつかの点で空気が動かない部分がある（弦の振動における節と同様に）．

すべての振動子の一般的な性質は，次のようなものである：振動する（すなわち，平衡位置のまわりに往復運動する）系の具体的な構造に関係なく，任意の時刻における系のエネルギーは，次の形に書ける：

$$E=\frac{\gamma}{2}q^2+\frac{\beta}{2}q'^2 \qquad (*)$$

ここで q は平衡位置からのずれを特徴づける量であり，q' は量 q の時間的な変化の速さである（すなわち，$q'=\Delta q/\Delta t$ で，Δt は短い時間間隔である）．項 $\Pi=\gamma q^2/2$ は振動子のポテンシャル・エネルギーである；係数 γ は振動子の剛(かた)さと呼ばれる．項 $K=\beta q'^2/2$ は振動子の運動エネルギーである；係数 β は振動子の質量と呼ばれる．（最も簡単な振動子——ばねに吊された錘——のエネルギーを記述する式を思い出すと，γ が振動子の剛さと呼ばれ，β が振動子の質量と呼ばれる理由がわかるだろう（図 2）．）

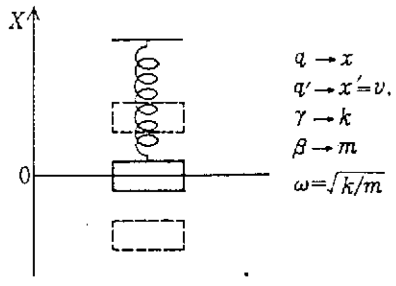


図 2

振動子が具体的にどのような構造を持っていても，その振動の角振動数 $\omega=2\pi/T$ は，剛さ γ と質量 β をつかって，次のように表される：

$$\omega=\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}$$

座標が，必ずしも平衡位置からの距離を表さ

ず，任意の意味をもつ“一般化された”振動子を導入したとき，エネルギーが式(＊)の E と同じ構造を持っていれば，そこで起っている過程の物理的な特性を考察しなくても，振動系の行動について一定の結論を出すことができる．

説明のために，上の述べたすべての例とは異なる，もう一つの振動子の例をとりあげよう．伝導性の良い導体で作られたインダクタンス L のコイルが，電荷 Q_0 をもつ容量 C のコンデンサーに接続されたとしよう（図3）．この回路には，電磁気的振動が生ずる．もしコイルが超伝導体でできているとすると（そのためには低温が必要だが），振動は実質的に減衰しない．

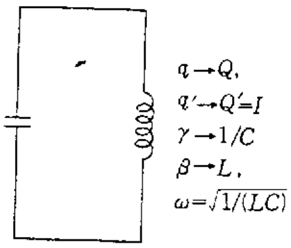


図3

この系のエネルギーは，二つの項からなる：コイルの中の磁場のエネルギー K と，コンデンサーの中の電場のエネルギー Π である．コンデンサーの電場のエネルギーは，電極にその瞬間に存在する電荷 Q の2乗に比例する：$\Pi=Q^2/2C$．コイルの磁場のエネルギーは，その瞬間にそこを流れる電流の強さ I の2乗に比例する：$K=LI^2/2$．ところで，電流の強さはコンデンサーの電荷の時間的変化の割合に等しい：$I=Q'$．したがって，磁場のエネルギーは $K=LQ'^2/2$ となる．

それゆえ，任意の時刻における系のエネルギーは，次の式で表される：

$$E=\frac{1}{2C}Q^2+\frac{L}{2}Q'^2$$

この系は振動子である．振動子の座標の役割を電荷 Q が演じ，振動子のポテンシャル・エネルギーはコンデンサーの電場のエネルギーで，運動エネルギーはコイルの磁場のエネルギーである．エネルギーの式から，この振動子の剛さは量 $1/C$ であり，質量の役割をインダクタンス L が演ずることがわかる．直ちに，振動数を書くことができる：$\omega=\sqrt{1/LC}$．

このような振動子は，電気的振動回路と呼ばれる．

いかに解の見通しをつけるか？

問題を解く基礎となる方程式を見出すより前に，すなわち問題の正確な解を求める手段を手に入れるより前に，解のいくつかの面を明らかにする例を示そう．これは，振動子の場合よりは，かなり複雑な次元解析の例である．

理論物理学における，最も困難で未だ解かれていない問題の一つは，重力現象と電磁気現象の関係である．

もし，そのような関係が存在するならば，未だ発見されていない方程式を解いた結果として，重力定数 γ と電磁気現象を特徴づける量との間の関係を与える無次元の数＊）が得られるだろう．後者の量には，光速度 c，電子の電荷 e および質量 m がある．もし，量子現象を考えるならば，問題にはさらにプランク定数 h が現れるだろう．γ，c，e，m，h の次元を知れば，これらの量の組合せでできる，互いに独立な無次元の量は二つしかないことが容易にわかる：

$$\alpha=\frac{e^2}{\hbar c},\quad \xi=\frac{\hbar c}{\gamma m^2}$$

（$\hbar=h/2\pi$ であることを思い出そう）．

この組合せの最初のものは，電磁場と電子の相互作用を特徴づける量で（電子の無次元の“電荷”である），微細構造定数と呼ばれる．数値を代入すると，$\alpha=1/137$，$\xi=5\times10^{44}$ が得られる．ξ のように大きな数が，何らかの合理的な方程式を解いた結果として現れるものだろうか？　物理学の問題を解いた結果として現れる無次元の数は，われわれが既に述べたように，1の何倍か，何分の1かのオーダーの大きさをもつはずである．それゆえ，結果的に1のオーダーの数を与えるような形で ξ が問題に現れることを期待するのが自然である．ここでわれわれは良識をつかった．今やちょっとした直観的な論理的ジャンプをしなければならない．理論に

$$2\ln\xi\sim1$$

という組合せが現れるというのは，もっともらしい．

明らかに，このような関係を知っていることは，解の探求を容易にする．電磁気と重力の関係

＊）種々の物理量の間の関係が単位のとり方に依存しないためには，それは無次元の組合せの形に書かれる筈である．

についての問題を解こうとする現在の理論的試みには，量ξがまさにこの形で現れている．

III 極端な単純化

量子力学の基本アイデア

問題を極端に単純化するもう一つの例をとり上げて，現象の基本的な様相が次元解析により決定できることを示そう．この例は，問題への定性的なアプローチとはどのようなものか，をも説明する．

量子力学によれば，原子の中の電子のエネルギーは，不連続な値しかとり得ない．

水素原子の中の電子がとり得るエネルギー値は，次の式で与えられる*)：

$$E_n=-\frac{me^2}{\hbar^2}\cdot\frac{1}{2n^2} \qquad (**)$$

異なる二つの$n(n=1,2,3,\cdots)$に対するE_nの値の差は，実験的に求められるスペクトル線の，非常に正確な振動数によって検証されている．

量子力学の基本的なアイデアは，各粒子(今の場合は電子)が，ある種の波動的な過程で特徴づけられ，その波動は

$$\lambda=\frac{2\pi\hbar}{mv}$$

で与えられる，ということである．ここで，mは粒子の質量，vはその速度である．電子のエネルギーの不連続な値は，電子の運動している軌道の長さが波長の整数倍でなければならない，という条件から得られる．もし，軌道の半径がrであれば，電子のn番目の状態は，条件$2\pi r=\lambda n(n=1,2,\cdots)$すなわち$mv_n=\hbar n/r$に対応する．この式から，$n$番目の状態の運動エネルギーが容易に計算できる：

$$W_n=\frac{mv_n^2}{2}=\frac{\hbar^2n^2}{2mr^2}$$

電子の全エネルギーは，運動エネルギーと核の場の中でのポテンシャル・エネルギーとの和であり，後者は負で$U=-e^2/r$に等しい．したがって，水素原子の中の電子の全エネルギーは，次の式で与えられる：

*) 物理学者は，いつでもSI単位系をつかうとは限らない(著者の注)．

$$E_n(r)=\frac{\hbar^2n^2}{2mr^2}-\frac{e^2}{r}$$

われわれの計算では，軌道半径rは決まった値をもつ，と仮定した．量子力学によれば，軌道半径は古典的な安定軌道の近くに“散らばっている”．計算の便宜上，軌道はエネルギー$E(r)$の最小値に対応するrの値をとる，と考えることにしよう．

$E(r)$の最小値を求めるために，次のように考える．$E(r)$に対する式を書き直して，次の形にする：

$$E=Ax^2-Bx$$

ここで次の記号を導入した：$x=1/r$，$A=\hbar^2n^2/2m$，$B=e^2$．$x_1=0$と$x_2=B/A$において，Eの値は0になることがわかる(図4)．区間$x_1<x<x_2$の内部では，Eは負である．Eの極小値E_{min}はこの区間の中のどこかで起る．E_{min}が区間の中心$x_{min}=B/2A$で起ると仮定しよう．すると$r_{min}=1/x_{min}=2A/B$．すなわち，

$$r_n=\frac{\hbar^2n^2}{me^2}$$

この式は，式(**)と一致する！

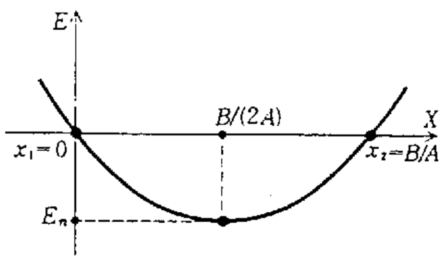


図4

実際には，電子は核から任意の距離に種々の確率で存在しうる．われわれの単純化は，その距離が一定の値rであり，それがエネルギーを最小にするという条件で決まる，と考えたことにある．それゆえ，この式の前にかかっている数乗数の値が偶然正しかったとしても，それを信用することはできない．しかし，それ以外はすべて信用できる！　乗数$me^4/\hbar^2$と，そして特に重要なのは“量子数”nに対する依存性とは，信用してよいものである．

正確な解を求めるには，量子力学の基礎方程式(シュレーディンガー方程式)と非常に複雑な数学(高等学校レベルで)の知識とを必要とする．したがって，われわれが得た結果は定性的な解で

あり，未知の数乗数を残した精度で得られたものであるが，問題に現れるパラメータに対する依存性の特徴は，正確に表現している．定性的な解は，現象の主要な面を明らかにすることにより，正確な解を求めるのを容易にする．その上，定性的な解が知られていれば，正確な解が解析的に得られない場合にも，問題の理解を特に損うことなしに，計算機をつかって正確な解を求めることができる．

もう一つの一般化——量子的振動子

振動子の量子化に関する問題を解くことは困難ではない．その際に，振動子がどのようにできているか——それがばねに吊されて振動する錘か，電気的振動を起す回路か——は重要でない．

振動子の一般化座標を q で表す．振動子のエネルギーは，次の形に書ける：

$$E=\frac{\gamma}{2}q^2+\frac{\beta}{2}q'^2$$

振動子を，質量が β のある“粒子”が，剛さ γ の“ばね”で振動しているものと想像することも可能である．この対象にたいして量子力学の基本概念を定式化するために，今考えている“粒子”に付随した波動的な過程の波長 λ を導入する：

$$\lambda=\frac{2\pi\hbar}{\beta q'}$$

分母には“粒子”の“質量”とその速度の積がある．“粒子”が運動するにつれて速度は変るから，波長も変化する——波長は平衡位置の近くでは極小で，“粒子”の速度が小さい領域では増大する．

“粒子”が $-q_0$ から $+q_0$ の領域を運動するとしよう．($2q_0$ は振動子の振幅ではなく，その座標が“振れる”領域の幅であることに注意しよう．) 定在波ができるためには，“長さ”$2q_0$ が半波長の整数倍に等しくなければならない：$2q_0=(n+1)\lambda/2$ $(n=0,1,2,\cdots)$．速度の評価のために，$q=q_0$ において決まる（波長を通して）速度 q' の値，すなわち $(q')_0=2\pi\hbar/\beta\lambda=\pi\hbar(n+1)/2\beta q_0$ をとろう．この値を運動エネルギーの表式に代入すると，次の式を得る：

$$W_n=\frac{\pi^2 t^2}{8\beta}\frac{(n+1)^2}{q_0^2}$$

全エネルギーとしては，次の式を得る：

$$E_n(q_0)=\frac{(\pi\hbar)^2}{8\beta}\frac{(n+1)^2}{q_0^2}+\frac{\gamma q_0^2}{2}$$

q_0 が小さいとき，エネルギーは第1項により大きくなるが，q_0 が大きいときには第2項により大きくなる．最小のエネルギーを与える q_0 のおよその値は，両項を等置して得られる．この条件から，q_0 にたいして次の値を得る：

$$q_0^2=\frac{\pi\hbar(n+1)}{2\sqrt{\beta\gamma}}$$

エネルギーの式にこの値を代入すると，次の式が得られる：

$$E_n=\frac{\pi}{2}\hbar\sqrt{\frac{\gamma}{\beta}}(n+1)$$
$$=\frac{\pi}{2}\hbar\omega(n+1), \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

量 $\omega=\sqrt{\gamma/\beta}$ は，古典的振動子の振動数である．

正確な計算によれば，エネルギーは次の式で与えられる：

$$E_n=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

これを見ると，二つの表式では数乗数が違い（1の代りに $\pi/2$），また最低エネルギー状態，すなわち $n=0$ の時のエネルギーの値が違う（$\hbar\omega/2$ の代りに $\pi\hbar\omega/2$）．しかしそれ以外はすべて正しく計算できた！　こうして結果が得られたので，それを求めるために使用した事項と，量 q_0^2 および振動子のエネルギーに対して得られた式から導かれる結論とについて，考察することにしよう．

まずわれわれは，振動子がどのような構造を持っているかに関係なく，最初電子に適用して確かめた量子力学の原理を，振動子に適用した．確かに，一般原理が，電子の質量とは異なる質量を持つ他の粒子にも同等に成り立つと期待するのは自然である．実際，そのような一般化は，高い精度で経験的に確かめられている．しかし，振動回路のような，“座標”の役割をコンデンサーの極板上の電荷が演ずる対象にも適用できるのはなぜだろうか？　ここでわれわれは，20世紀の物理学において広く用いられてきたし，今でも用いられている重要な仮定をしている．もし二つの系のエネルギーが，座標と速度に対して同じ依存性をもつなら，それらの系は同じ性質をもつ．そのとき，“座標”と“速度”が二つの系でまったく違う意味を持っていてもかまわないのである．

この仮定が実験と矛盾した例は，今までのとこ