«Квант» для младших школьников

ソ連科学誌・クヴァントから

やさしい物理学——⑦

小島　英夫（静岡大学）訳

調和振動の数学 A. P. ベセロフ (1986, NO. 9, pp. 9〜13, 43)

振動と波動は，物理的・理論的な観点で現実の世界を理解する手段として基本的なものである．あらゆるものが振動しうる——あらゆる対象，固体，液体および気体が；光，音，神経パルスなどは結局のところ振動の諸形態の数例である

アカデミー会員　S. P. ノビコフ．

振り子時計，海の波，ぶらんこ，昼と夜の交代，気候の季節変化——あなた方はこれらの例に，さらに多くの振動現象の例をつけ加えることができるだろう．多くの発展過程と同様に，これらの現象は数学的に微分方程式で記述することができる．何らかの系の振動を記述するあらゆる微分方程式の中で，最も簡単なもの(したがって最も重要なもの）は，線形振動の方程式（あるいは調和振動，あるいは小振幅振り子の方程式）である：

$$\boxed{\ddot{x}+\omega^2 x=0} \qquad (*)$$

ここで，$\ddot{x}$ は関数 $x=x(t)$ の時間についての2次の導関数を表し，x は平衡位置からの系の変位を表す．また ω^2 はある（正の）定数である．

われわれはここで，線形振動の方程式がどこから，どのようにして得られるかを説明しよう．そして，数学的見地からの研究にとりかかろう．

線形振動の方程式はどこに現れるか？

この方程式が現れないところはない！　考えてみてごらんなさい．

1．振り子の小振動．長さ l の伸びず，曲らない糸に質量 m の小さな重りをつるす．重りの大きさと空気の抵抗は無視できるとする．このような系は**数学的振り子**（**数学振子**）と呼ばれる[*]．糸が鉛直線からわずかにずれ，したがって角度 α が小さいときの振り子の振動を考察しよう（図1）．弧 BA の長さを x とする：$x=l\alpha$（α はラジアンではかった角 BOA の大きさ）．すると，重力 $\vec{P}=mg$ を二つの成分 $\vec{T}$ と $\vec{F}$ に分けて（図1を見よ），$\vec{F}$ の大きさが $mg\sin\alpha$ に等しいことがわかる．ニュートンの法則により，運動の方程式は

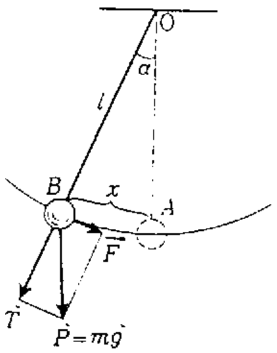

図1

$$ml\ddot{\alpha}=-mg\sin\alpha,$$

すなわち，

$$\ddot{\alpha}=-\frac{g}{l}\sin\alpha.$$

ずれ $\alpha=\alpha(t)$ に関する（非線形な）方程式が得られた．ここで α が小さいことを使うと，極限では $\lim_{\alpha\to 0}(\sin\alpha/\alpha)=1$ であるから，右辺の $\sin\alpha$ を α で置きかえられる，すなわち**線形化**できる．その結果，式(*)の形の（線形）方程式を得る．ここで $\omega=\sqrt{g/l}$ である．

2．ばねにつけられた物体（図2）．平衡位置から x だけずれたとき，フックの法則により，ば

[*]）これに対して，固体の1点を固定し，そのまわりに固体全体を振らせるようにしたものを**物理振子**（**実体振子**）という（訳注）

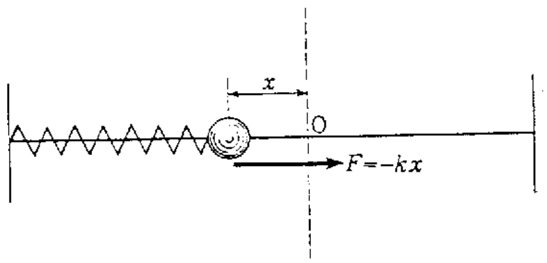

図2

ねから物体に $F=-kx$ の力がはたらく．ここで k はばね定数（ばねの剛性）と呼ばれる定数である．運動方程式は式(＊)と一致し，$\omega=\sqrt{k/m}$ である．もちろんここでも，力にたいする式は，(したがって方程式(＊)も)平衡位置からの変位が大きくないときにだけ正確である．

3．振動回路（図3）．容量 c のコンデンサーとインダクタンス L のコイルからなる回路を考える．コンデンサーの電荷 q は，抵抗がない場合には，方程式 $L\ddot{q}+\frac{1}{C}q=0$ にしたがって変化する．したがって $\omega=1/\sqrt{LC}$ のときの方程式(＊)に対応する．

4．伝達管(図4)．U字型のパイプに液体(例えば水銀)を入れ，平衡位置から液面を少しずらすと，液体はパイプの鉛直の部分の各々で交互に上昇（および下降）をはじめる．もし初めのずれが小さければ，(摩擦を無視したとき)，液体のずれ $x=x(t)$ は方程式(＊)にしたがう．

5．浮き秤（図5）．液体の密度を測るのに用いられるこの器具を，平衡位置から少し下へ押し込むと，アルキメデスの原理によって，浮き秤は上下に振動をはじめる．この振動もまた十分正確に方程式(＊)によって記述される(すべての場合に，摩擦については考えていない)．

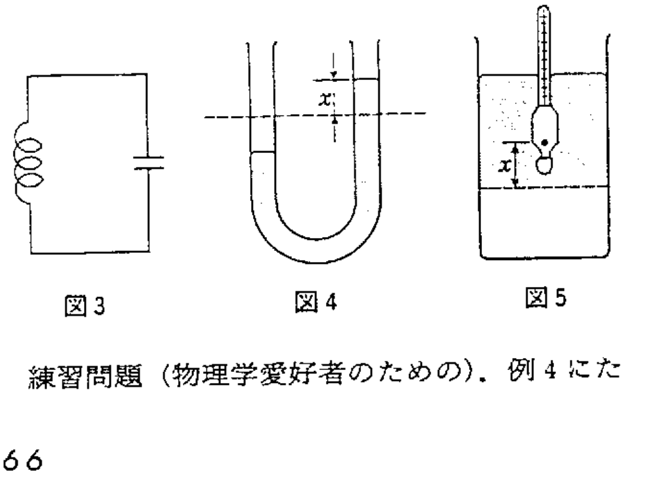

図3　　図4　　図5

練習問題（物理学愛好者のための）．例4にたいする方程式(＊)を導き，関連するパラメータで ω を表せ．

上にあげたすべての例に共通なのは，何だろうか？　系の状態は1個のパラメータ x で記述され，それは平衡値 $x=0$ を中心にして変化する；系には力 $F(x)$ が作用し，それはパラメータ x だけに依存する．エネルギーの損失を無視すると，パラメータの変化は，ニュートンの第2法則によって $\ddot{x}=F(x)$ の形に書ける．ここで $x=0$ は平衡な位置であるから $F(0)=0$ である．もし $x=0$ において関数 $F(x)$ の導関数がゼロでない，すなわち $F'(0)\equiv\lim_{x\to 0}(F(x)/x)=a$ であると，x が小さいとき運動方程式の右辺 $(F(x))$ を ax で置きかえることができる．

その場合，a は必らず負でなければならない．さもないとゼロ点のまわりのどんな振動も起り得ない．かくして，われわれは線形方程式(＊)に到達する．ここで $\omega=\sqrt{-a}=\sqrt{-F'(0)}$ である．

ここで示した線形化のいくつかの過程は，当然，まったく等じではない微分方程式に導くが，それにも拘らず，それらは平衡点の近傍での運動の定性的な様子を正しく記述している．

以上の説明は，線形振動の方程式(＊)の普遍性を示すと同時に，その名の由来をも示している．

解の存在と一意性

容易に確かめることができるように，方程式(＊)は関数 $x=\cos\omega t$ および $x=\sin\omega t$ によって，したがってその線形結合，すなわち次の形の式によってみたされる；

$$\boxed{x(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t}\qquad(**)$$

(これを確かめよ！)[*]．

この方程式には他の解は存在しないことを示そう．

＊）運動の過程で次の量が保存されることを用いる：

$$E=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+\omega^2x^2)=\text{const}.$$

(エネルギー保存則)，実際に，$\dot{E}=\dot{x}\ddot{x}+\omega^2x\dot{x}=\dot{x}(\ddot{x}+\omega^2x)=0$．これから $E=\text{const}$ が得られる．

ここで方程式(*)の任意の解：$x=x_1(t)$ とその初期条件 $\alpha=x_1(0)$ および $\beta=\dot{x}_1(0)$ を考える．式 $x_2=a\cos\omega t+b\sin\omega t$ の係数 a と b を，$x_2(0)=\alpha$, $\dot{x}_2(0)=\beta$ をみたすように選ぼう．それには $a=\alpha$, $b=\beta/\omega$ ととればよい．そこで差 $x(t)=x_1(t)-x_2(t)$ をつくると，これはまた方程式(*)の解となる（これを確かめよ）．その初期値はゼロとなる：$x(0)=\dot{x}(0)=0$．エネルギー保存則によって，

$$E=\frac{1}{2}(\dot{x}^2(t)+\omega^2x^2(t))=\frac{1}{2}(\dot{x}^2(0)+\omega^2x^2(0))=0,$$

これから $\dot{x}(t)\equiv x(t)\equiv 0$．すなわち

$$x_1(t)\equiv x_2(t)\equiv\alpha\cos\omega t+\frac{\beta}{\omega}\sin\omega t.$$

このようにして，任意の解は式(**)の形をもつことが示された．ここで a と b は初期条件により一意的に決められる．証明の過程で，解の公式の定数が初期条件により決定された．

位相平面上の円にそっての運動

次のような驚くべき事実に注目しよう．方程式(*)には予期しない仕方で数値 π が隠れていることが明らかになる，問題の設定には円などはありもしないのに．実際に，方程式(*)のすべての解は（$x(t)\equiv 0$ を除いて），時間の周期関数となり，その周期に ω をかけると 2π に等しくなる！ひとたび数値 π が現れたならば，円を探してみよう．

どこに円を探したらよいだろうか？　位相平面，すなわち座標 (u, v)；$u=x$ および $v=\dot{x}$ をもつ平面の上で探すことにしよう．この平面上の点 (u, v) は位相点と呼ばれる；その点は系の状態を記述する：座標 $u=x$ は系の平衡位置からの変位を表し，座標 $v=\dot{x}$ は考えている時刻における系の運動の速度を表している．時間の経過とともに，位相点の位置 $(u, v)=(x(t), \dot{x}(t))$ は変化し，それは位相面上に位相軌道と呼ばれる曲線を描く．どんな曲線か？　勘の良い読者は考えるに違いない——円ではないか？

先を急ぎすぎてはいけない．今のところ，われわれは楕円しか知らない——エネルギーの値 E＝一定の曲線，すなわち，曲線

$$\omega^2u^2+v^2=2E$$

*）このことと関連して，方程式(*)は，時に，正弦および余弦の方程式と呼ばれる．

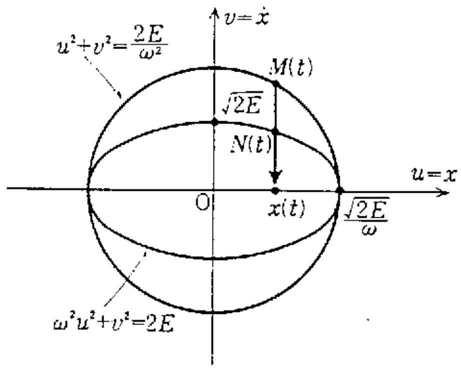

図 6

である．（不必要な分数を取扱うことを避けるために 2 倍した）．この曲線は図 6 に描かれている．エネルギー保存則によって，時刻 t にエネルギー E をもつ位相点 $N(t)=(x(t), \dot{x}(t))$ は，つねに楕円(1)の上にあり，したがって楕円に沿って動いてゆく．

楕円の水平軸を半径とする円を描き，位相点 $N(t)$ を通る直線を Ov 軸に平行にひき，円との交点を $M(t)$ とする．すると $N(t)$ の x 軸の座標と $M(t)$ の x 軸の座標は一致し，$x(t)$ である．

$x(t)$ にたいする式(**)を補助変数を用いて変形しよう：

$$x(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t=\sqrt{a^2+b^2}\cos(\omega t+\varphi), \quad (2)$$

ここで，φ は次の条件式により決められる：

$$\cos\varphi=a/\sqrt{a^2+b^2},\ \sin\varphi=-b/\sqrt{a^2+b^2}. \quad (3)$$

$A=\sqrt{a^2+b^2}$ と書くと，次のようになる：

$$A=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\alpha^2+\beta^2/\omega^2}=\omega^{-1}\sqrt{\beta^2+\omega^2\alpha^2}$$
$$=\omega^{-1}\sqrt{\dot{x}^2(0)+\omega^2x^2(0)}=\sqrt{2E}/\omega.$$

それゆえ，$x(t)$ は次の形に書ける，

$$x(t)=\frac{\sqrt{2E}}{\omega}\cos(\omega t+\varphi). \quad (4)$$

$A=\sqrt{2E}/\omega$ という量は，調和振動のふれ幅を特徴づけており，振幅と呼ばれる．ω を円振動数，$T=2\pi/\omega$ を周期，φ を位相という．

ここで，点 $M(t)$ は，O を中心とし，半径 A の円上を，角速度 ω で一様な運動をすることが容易にわかる．実際，もし φ が時刻 $t=0$ における角 $uOM(0)$ を表すと考えると，点 $M(t)$ の Ou 軸上への射影が式(4)で与えられるのであるから，角 $uOM(t)$ は $\omega t+\varphi$ に等しい．このようにして，調和振動は，半径が振動の振幅に等しく，回転の角速度が円振動数に等しい円のまわりの等

速円運動の，直線上への斜影であることがわかった．

同様の考え方は，調和振動が一様に回転するベクトル（今の場合には $\overline{OM}$）の座標成分の一つだと考えることからも得られる．そのベクトルの大きさは振幅に等しく，$t=0$ における位置が位相を決める．振動のこのような表し方は**ベクトル・ダイアグラム**と呼ばれ，しばしば有用である．これをつかって，以下の問題を解いてみてください．

問題 1．二つのゼロでない調和振動の和は，それらが同じ振動数をもつとき（すなわちコヒーレントなとき）に，そのときに限って，調和振動になることを示せ．二つのコヒーレントな振動の和が最大の振幅をもつのは，位相の間にどのような関係があるときか？　最小になるのはどういうときか？　調和振動の積についてはどんなことが言えるか？

問題 2．同じ振幅と振動数をもち，位相がそれぞれ φ，$\varphi+(2\pi/3)$ および $\varphi+(4\pi/3)$ の三つの調和振動の和はゼロになることを示せ．

この事情は三相電流を用いる際に重要な役割を演じ，このような振動が交流電流の三相発電機に用いられる．ベクトル・ダイアグラムをつかうと，なぜ220 V の電圧と127 V の電圧の比が近似的に $\sqrt{3}$ に等しいのかの説明を見出すことができる．

問題 3．方程式

$$\cos x+\frac{1}{2}\cos(x+a_1)+\frac{1}{4}\cos(x+a_2)+\cdots+\frac{1}{2^n}\cos(x+a_n)=0$$

（$a_1, \cdots a_n$ は任意の定数）は区間 $[0, 2]$ にいくつの根をもつか？

われわれの考察の結果により，方程式（$*$）は図7となる．この図は数学的には微分方程式の位相表現あるいは位相図と呼ばれるものである．この

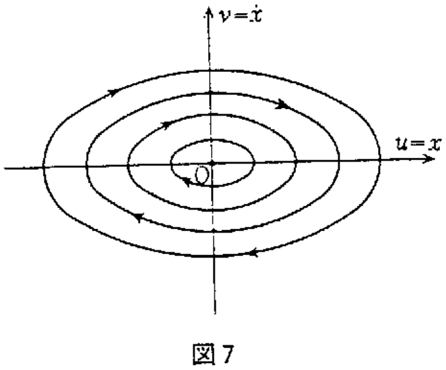

図7

図から次のことがわかる：各位相点はそのエネルギー準位に対応した固有の楕円に沿って周回運動しており，平衡位置からのずれ $x(t)$ は周期的に変化する．速度 $\dot{x}(t)$ も周期的に変化しその最大値は平衡位置で起る．調和振動子の次のような顕著な性質に注目しよう：その振動周期は振幅に依存しない！　この性質は例外的であって，このことは数学振子の場合に，明らかにすることができる．次にこの問題を考察しよう．

数学振子の数学

数学振子の理論を，振幅が小さいという条件を取除いて（摩擦がないことは前の通りに）考えよう．この場合の運動方程式は既に見たように，次の形になる（$\alpha\equiv x$）：

$$\boxed{\ddot{x}+\omega^2\sin x=0} \qquad (***)$$

方程式（$***$）は線形振動の方程式（$*$）とあまり違わない形をしているが，すでに非線形であり，それを解くのはそれほど簡単ではない．というより，その解を高等学校で習った関数をつかって表すことは不可能であり，そのためには楕円関数と呼ばれる特別な関数をつかわねばならない．どうしたらよいだろうか？

方程式（$***$）の解と数学振子のふるまいについての観念を得るために，その位相表現を用いよう（図8）．これはエネルギー保存則をつかって描くことができる．この図を考察しよう．

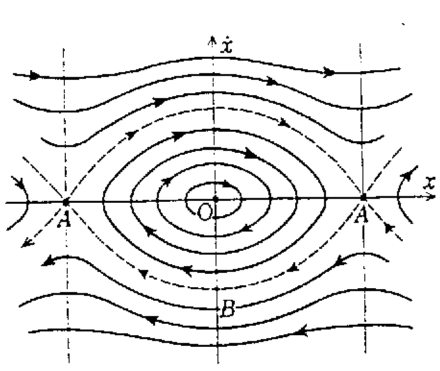

図8

Ox 軸上の三つの黒点は，平衡位置に対応する――安定な平衡点（座標の原点）と不安定な平衡点（点 $A(\pi\,;0)$）で，それらは振り子の最低位置と最高位置である．安定な平衡点 O のまわりの横に伸びた円は振り子の種々の振動

（異なる振幅の）に対応する；点 O の近くでは明らかに楕円―方程式（＊）の位相軌道―と違わない）；この種の伸びた円の一周は（大きくても小さくても）振り子の振動の全周期に対応する；それが Ox 軸と交る点は，安定平衡な位置を最大速度で通過することに，Ox 軸との交点は振り子の最大のずれ（ゼロ速度）に対応する．図の上と下の部分にある波形の軌道は，振り子の一様でない回転に対応し，はじめに振り子を押す力が強い場合に起る；振り子は上の平衡位置に，ゼロでない速度で到達し，そこを通過して回転を続け，平衡位置を通過するときに速度は最大値に達する．点線は回転運動と振動運動を分ける位相軌道を示す．この軌道は，上の（不安定な）平衡位置 $A(\pi;0)$ における振り子のポテンシャル・エネルギーに等しいエネルギー値 E_0 をもつ運動に対応する；この場合，振り子は下の平衡位置 B を最大速度 $v_0=\sqrt{2E_0/m}$ で通過し，しだいに速度を落して上の平衡点に近づく；そこへ（ゼロ速度で）無限大の時間の後に到達する．

結　　論

われわれはここで線形および非線形振動子の性質のいくつかを学んだ．たぶん，振動子の最も顕著な特徴は，その多様性と普遍性である：方程式（＊）と（＊＊＊）で記述される，単純で多様な物理系を，すべて列挙することは困難である．振動子は多くの複雑な系にも現れる．例えば，すでにニュートンによって考えられた音波のモデルがある：音波の伝播方向に沿った直線上に，質量のない小さなバネで結合された点状の，振動する錘である．この系の運動エネルギーは錘に集中し，ポテンシャル・エネルギーはバネに貯えられる．このような系は，直線上の結合振動子系と呼ばれる．こういう系は，平面上でも，空間的にも，考えることができる．

結合振動子系は，力学と物理学の多くの分野において，非常に有益なモデルである．素粒子物理学のような高度な科学においてさえ，とくにその基礎の一つ――物理的真空のモデル――において，結合振動子系が用いられている．この観点に立つと，真空は非常に複雑な楽器だと考えることができ，それはどんな外的作用にも，この，またはあの振動で，応答するのである．

（訳　こじま　ひでお）