Basic 数学
1991.8

«Квант» для младших школьников

ソ連科学誌・クヴァントから

やさしい物理学 ――― ⑥

小島　英夫（静岡大学）訳

1．力学系の平衡と仮想変位の方法 A.A. ヴァルラモフ（1989, № 1, pp. 45～47）

スイスのある大聖堂を建てるとき，非常に重い荷物を高い所へ上げるために，建築家が滑車を必要としたという．彼は非常に複雑な複滑車を組立てたが，複雑なロープの張力の計算で混乱に陥り，荷物を引上げるのに作業員を何人雇ったらよいのか計算できなかった．建築家を援助するために，有名な学者ヨハン・ベルヌーイ（1667-1745）が呼ばれた．建築家が驚いたことに，ベルヌーイは図面を見るや否や回答を与えた．感心した建築家は，そんなに簡単に答をだした秘密を彼に尋ねた．

われわれもベルヌーイに従って，力学的な系の平衡の問題を考察してみよう．

系の平衡条件を明らかにするためには，ふつうは力学的束縛による反作用力を導入する．その力学的束縛とは，系内の各粒子の位置やそれらの粒子の変位の可能性に加えられる制約のことである．力学的束縛の例には，錘をつった糸，機械の各部分をつなぐジョイント，物体系がのっている平面などがある．系内の束縛が多ければ（例えば，われわれの建築家のつくった複滑車における綱），そこに生ずる反作用力の効果を見究めるのは一層困難になる．

多くの場合に，力学的束縛は著しい特性を持っており，ベルヌーイが力学系の平衡条件を見出すのに用いた，簡単で優雅な方法の基礎にも，それが使われている．その特性は次のようにまとめられる：**束縛条件の下にある系が，平衡状態からの任意の十分小さな，可能なずれを起したときに，全反作用力がする仕事の総和はゼロである．**

系の平衡状態からの“任意の十分小さな，可能なずれ”が何を意味するかについて，ここで特に説明しておく必要がある．まず第一に，当然のことだが，このずれを起す，系の各点の変位は，力学的束縛と矛盾してはならない（糸は切れるべきでないし，ジョイントは折れてはならない）．このような変位は可能な変位，あるいは仮想的な（つまり思考上の）変位と呼ばれる．それは真の変位とは区別しなければならない．真の変位は加えられた力の作用の下で起るものである．仮想変位は，系の運動の過程とは関係がない．それは単に，系に起りうる力の間の関係を明らかにし，平衡条件を確立するために導入されたものである．変位が小さいことは，反作用力が変らないと考えることを可能とするために，必要とされる．

任意の仮想変位に際して，各反作用力の仕事の和がゼロになるような束縛は“理想的である”と言われる．すべての束縛が理想的である訳ではない，ということを強調しておこう．もし考えている系の物体がまさつのある面に乗っているとすると，その束縛（面）はすでに理想的ではない．

理想的な束縛の性質を示す例として，完全剛体を形成する一つの質点系を考えよう．この剛体の任意の点Aは，すべての他の点と反作用力で結合している．他の任意の点Bを選び，この二点の間にはたらく反作用力を $\vec{F}_{AB}$ と $\vec{F}_{BA}$ で表す（$\vec{F}_{AB}$ は点Aに，$\vec{F}_{BA}$ は点Bにはたらく力である）．ここで，剛体のAとB以外の

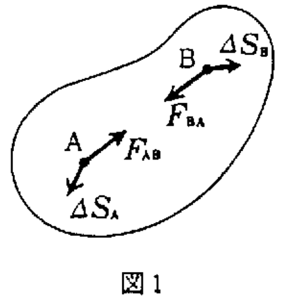

図1

すべての点は考えないことにする．すると系には，重さのない剛体の棒で結ばれた，二つの質点だけが残る．ニュートンの第3法則により，

$$\vec{F}_{AB}=-\vec{F}_{BA}. \qquad (*)$$

今，これらの点に任意の仮想変位，$\Delta\vec{S}_A$ と $\Delta\vec{S}_B$ とを生じさせる．$\Delta\vec{S}_A$ を両点に共通な，剛体全体の並進変位と考えることにすると，$\Delta\vec{S}_B=\Delta\vec{S}_A+\Delta\vec{S}'$ と書ける．ここに $\Delta\vec{S}'$ は点Bが点Aに対して行う回転による変位である．この仮想変位の際に反作用力のする全仕事は，

$$\Delta A=(\vec{F}_{AB}\cdot\Delta\vec{S}_A)+(\vec{F}_{BA}\cdot\Delta\vec{S}_B)$$
$$=((\vec{F}_{AB}+\vec{F}_{BA})\cdot\Delta\vec{S}_A)+(\vec{F}_{BA}\cdot\Delta\vec{S}').$$

この等式の右辺第一項は，条件式（＊）によりゼロになる．第二項もゼロになる．なぜならば，点Aに対する点Bの回転による変位 $\Delta\vec{S}'$ は，AとBを結ぶ直線に平行にはたらく力 $\vec{F}_{BA}$ に垂直だからである．まったく同じ論法で，剛体の任意の他の点にたいしても反作用力の仮想仕事（すなわち，仮想変位の際の全仕事）がゼロであることを示すことができる．このようにして，ここで考えた例では理想的な束縛の性質があることがわかる．

平衡の新しい原理を最終的に定式化するために，外力のする仮想仕事を考察しよう．平衡条件の下で系に加えられた各外力は，それらによって惹き起された反作用力と釣り合っていなければならない，ということに注意する．したがって，任意の仮想変位に際して，外力と束縛の反作用力とがする全仕事を計算することを考えると，それはゼロになることがわかる．しかし反作用力については，それが何らの仕事もしないことをわれわれは知っている．したがって，任意の仮想変位に際して外力のする，全仕事もまたゼロに等しい．

このようにして，力学系の平衡条件は，仮想（可能な）変位の原理（仮想仕事の原理）とよばれる次の形に定式化することができる．

理想的な束縛をもつ力学系の平衡にたいする必要かつ十分な条件は，任意の仮想変位の際に系にはたらく全外力がする仕事の和がゼロになることである．

1717年に，ヨハン・ベルヌーイによって定式化されたこの原理のおかげで，平衡条件を見出すために，莫大な数の束縛の反作用力を考える必要がなくなる．適当な仮想変位を選び，その時に外力のする全仕事を計算し，それをゼロと置くだけで十分である．

この原理を例示するために，最も簡単な例をとろう．質量 m の錘をつるしたばねの弾性力を求める．系として，錘そのものを考える．系には二つの外力，ばねの弾性力 T と錘にはたらく重力 mg とが作用している．平衡状態にある錘を，下方へ微小距離 Δx だけ動かしたとしよう．すると重力のする仕事は

$$\Delta A_1=mg\Delta x$$

に等しく，ばねの弾性力のする仕事は

$$\Delta A_2=-T\Delta x$$

に等しい．仮想変位の原理により，この二つの力のする仕事の和はゼロに等しい：

$$\Delta A_1+\Delta A_2=mg\Delta x-T\Delta x=0.$$

これから，求める弾性力 T は

$$T=mg$$

となる．

もちろん，この問題はふつうの方法で，物体の平衡条件をつかって，解くこともできる．しかも，この場合には，どちらの方法をつかっても同程度に容易に解ける．しかし，多くの場合に，仮想変位の方法を用いると，解をより速く，より簡単に求めることができ，ふつうの平衡条件にもとづいては原理的に解けないような問題でさえ，解くことが可能となる場合さえある．

また，仮想変位の方法は，力学的な問題ばかりでなく，静電気学や分子物理学の問題にも適用して，成果をもたらすことを注意しておく．

2．回転運動の力学 V.I. チビリョク (1986, №11, pp. 17〜18)

交叉点をゆっくり通過したトロリー・バスは，なめらかに速度を増しながら，大通りを遠ざかっていった….

トロリー・バスの車体の動きは——われわれをとりまく世界の，複雑な力学的運動の多くの例の一つにすぎない．任意の複雑な運動は，二つの簡

単な運動——並進と回転—の和として表せるのである．このことを理解すると，次のことがわかる：並進運動している適当な基準系をとることによって，任意の運動を，ある静止した軸のまわりの単なる回転と見ることが，いつでも可能である．

どのような基準系をとれば，われわれの例でのトロリー・バスの車体の運動を純粋な回転と見ることができるのか？ どのような物理量をつかってその回転は記述され，それらの量は互いにどのように関係し，どのように時間に依存するのか？このような問題は，横断歩道の上ばかりでなく，具体的問題を解く場合に教室で，試験で，起ってくる．

第一の問題には，推量によって容易に答えることができる：並進運動する基準系としては，トロリー・バス自身（その車体）に結合したものをとることができる．残りの問題に答える前に，次のことに注意しよう．この例では，車体は一様でない回転をする—車体の任意の点の速度の絶対値は，時間的に変化する．

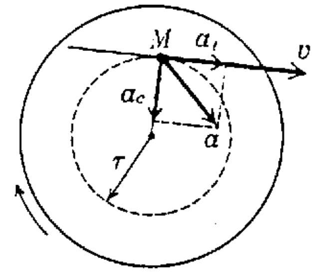

図1

回転軸から距離 r の点 M を考え，ある時刻にその速度が $\vec{v}$，加速度が $\vec{a}$ であったとする(図1)．物理的な考察から，加速度 $\vec{a}$ は二つの成分の和として表されることがわかる：一つの成分は，円の中心に向かう，動径に沿った求心加速度 $\vec{a}_c$ であり，第二の成分は円の接線に平行な接線加速度 $\vec{a}_t$ である．この二つの加速度は，それぞれ一定の物理的意味を持っている：接線加速度は速度の絶対値の変化の速さを表し，求心加速度は速度の向きの変化の速さを表す．次の事実はよく知られている：求心加速度の大きさは $a_c=v^2/r$ であり，接線加速度の大きさは，$a_t=\Delta v/\Delta t$ である．ここで，Δv は微小時間 Δt の間の速度の大きさ v の変化である．

並進量と角度量．上に見たように，車体の一様でない回転を表す物理量を（トロリー・バスに結合した基準系において）導入する必要がある．直線的な，一様でない運動との類推を用いて，このことを検討しよう．

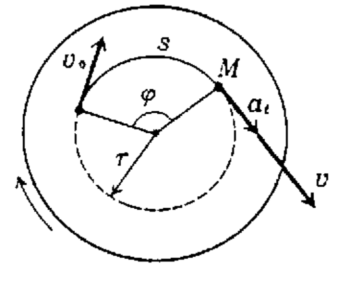

図2

短い時間間隔 Δt の間における，車体の1点 M の運動に着目する(図2)．この時間内に M は円弧に沿って s だけ移動し，速度 v と接線加速度 a_t を持つ．この3個の量 s，v，a_t は並進量と呼ばれ，点Mの運動を特徴づける．しかし，それは車体全体の回転を記述するには使えず，回転軸から異なる距離にあり，異なる並進速度と接線加速度を持ち，異なる軌道を描　他の点のその時刻における運動も記述できない．それゆえ，並進量のほかに角度量と呼ばれる物理量を導入する必要がある．それは回転している車体の，すべての点に対して同じになる量である：点Mと円の中心を結ぶ動径の回転角 φ，角速度 $\omega=\Delta\varphi/\Delta t$($\Delta\varphi$ は時間 Δt の間の回転角の変化) および角加速度 $\varepsilon=\Delta\omega/\Delta t$($\Delta\omega$ は角速度の変化) である．

明らかに，ここで導入した角度量は，トロリー・バスの車体だけでなく，任意の他の物体の回転を記述するのに用いることができる．一般には，時間がたつにつれて，回転角 φ だけでなく，角速度 ω や角加速度 ε も変化することがある．とくに，角加速度が時間に依存しないときには，角速度は一様に変化し，そのような場合は等加速度回転と呼ばれる．また角速度が一定なときには，角加速度はゼロであり，物体の一様な回転と呼ばれる．

並進量と角度量の関係．もちろん，並進量とそれに対応する角度量は，一定の方法で互いに関係づけられねばならない．その関係を考察しよう．

点Mまでの動径が，角度 φ だけ回転したとき(図2)，その点は円周に沿って，距離

$$s=r\varphi \tag{1}$$

だけ移動する．微小時間 Δt の間に，点は距離 $\Delta s=r\varphi_2-r\varphi_1$ だけ移動する．ここで φ_2 と φ_1 は時間 Δt の終りと始めにおける回転角である．この式を Δt で割り，$\Delta s/\Delta t=v$ と $(\varphi_2-\varphi_1)/\Delta t=\Delta\varphi/\Delta t=\omega$ であることを考慮すると，

$$v=r\omega \tag{2}$$

を得る．式(2)は並進速度と角速度の関係を，円周

に沿った点の一様な運動の場合だけでなく，一様でない運動の場合にも表していることに注意しよう．Δt 時間における一点の速度の絶対値の変化は $\Delta v=r\omega_2-r\omega_1$ である．ここで，ω_2 と ω_1 は時間 Δt の終りと始めにおける角速度である．この式を Δt で割り，$\Delta v/\Delta t=a_t$，$(\omega_2-\omega_1)/\Delta t=\Delta\omega/\Delta t=\varepsilon$ であることを考慮すると，接線加速度は

$$a_t=r\varepsilon \tag{3}$$

となる．

関係式(1)，(2)および(3)は，円周に沿って運動する点の並進量と角度量の間の簡単な関係を表す：並進量は対応する角度量に円周の半径を掛けたものになる．この関係は，ここではトロリー・バスの車体の一点 M という具体的な点に対して得られたが，回転する（一様に，あるいは一様でなく）物体の任意の点に対しても，同じ関係がなりたつ．

等加速回転運動にたいする力学の公式． 車体の回転が等加速度的な場合に，角速度 ω と回転角 φ の時間 t にたいする依存性を求めよう．

はじめの角速度を ω_0 とする．すると点 M は初速度 $v_0=r\omega_0$ を持ち，接線加速度の絶対値 $a_t=r\varepsilon$ が一定の運動をする．直線等加速度運動との類推により議論を進める．直線運動の場合には，並進速度 v と移動距離 s は次の等式により与えられる：

$$v=v_0+a_tt, \tag{4}$$

$$s=v_0t+a_tt^2/2. \tag{5}$$

時間 t を消去して，次の有用な関係式が得られる：

$$v^2-v_0^2=2a_ts. \tag{6}$$

等式(4)―(6)に $s=r\varphi$，$v=r\omega$，$a_t=r\varepsilon$，$v_0=r\omega_0$ を代入し，共通因子を約分すると，

$$\omega=\omega_0+\varepsilon t,$$

$$\varphi=\omega_0t+\varepsilon t^2/2,$$

$$\omega^2-w_0^2=2\varepsilon\varphi.$$

これは任意の物体（トロリー・バスの車体だけでなく）が，一定の角加速度の下で回転運動するときの力学の公式である．

3．慣性と不動性 (1985，No.11，pp. 20～21)

慣性（Инерция）と不動性（Инертность）という言葉は，ロシア語の発言が似ており，物理学においても，日常生活においても用いられる．多くの人は，物理的概念として，“慣性”と“不動性”が同じことを意味する，すなわちそれらは同義語だと考えている．本当にそうだろうか？

同義語は，文体論的なニュアンスを問題にしなければ，互いに交換できる（例えば，спешить と торопиться のように（いずれも“急ぐ”を意味する））．しかし，“慣性”と“不動性”は，どちらの言葉をつかっても同じ概念を表す，という訳ではない．ニュートンの第一法則は，慣性の法則と呼ばれるが，それを不動性の法則という人はいない．“慣性基準系”という言葉は存在するが，誰も“不動基準系”とは言わない．“慣性による運動”と言うことはできるが，“不動性による運動”とは言えない．このような例はたくさんあり，いくらでも考えることができる．

しかし，言葉が同じ意味を持たなくても，言葉には種々の概念が含まれているのではないか．“慣性”と“不動性”という言葉が，二つの異なる物理的概念を表すものと解釈する試みもなされている．

慣性とは何か？ 1632年に，ガリレイの“プトレマイオスとコペルニクスとの2大世界体系についての対話”（いわゆる“天文対話”）が出版された．その中で，力学に関する他の重要な概念と並んで，それから慣性の法則という名がつけられ，力学の基礎となった命題が定式化された．ガリレイは，経験と考察にもとずく非常に簡単な推論により，その命題に到達した．

傾いた平面を落下する小球は，次第にその速度を増す．同じ小球を斜面に沿って上へ動かすと，その速度は減る．“すると，斜面上で上りも下りもしない物体の運動についてはどうなるだろうか？”とガリレイは問う．この問いに対する答が慣性の法則であり，その最初のガリレイによる定式化は次の通りである：“物体が水平な面に沿って動くときには，運動を妨げるものには出会わず，したがって運動は一様で，平面が無限に続く

ならば運動は一定のまま持続する.”一連の例において，ガリレイは，慣性による運動が一様であるばかりでなく，直線的でもあることをも示した.

1687年に，ニュートンはこの主張を一般化し，それに次のような表現を与えた：“すべての物体は,外力によってその状態を変えるよう強制されない限り,静止または一様な直線運動の状態を保ち続ける”．ニュートンは，力を次のように定義した：“物体に作用し，その静止または一様な直線運動の状態を変えるもの”

ラテン語の“inertia（不器用，怠惰)”は，ロシア語で“不活発”さらには“無気力”と訳される／力の作用しない物体は,それ自身ではその速度を変えない——そうすることに無気力である．それゆえ，ガリレイ—ニュートンの法則(ニュートンの第一法則)は，慣性の法則(law of inertia)と呼ばれるのである．

力学的な運動は，自然現象である．つまり，運動の特別な場合——その速度が一定であるような運動——も含まれる．その現象は慣性現象である．正にこのような“慣性”の解釈が初等物理学ではなされている．日常的な“慣性による運動”という表現が，これに対応する．

すべての運動は一定の基準系に関して考察される，ということはよく知られている．慣性現象が観測される基準系は，慣性基準系とよばれる．そのような基準系が存在することを主張することは,本質的に慣性の法則の内容と同じことである／

不動性とは何か？　この概念に関しては,次のように考えることができる．二つの物体が相互作用しているとき，両者は加速度を得る．しかしその加速度は，一般に同じではない：一方は小さく，他方は大きい．加速度の小さい物体については，慣性による運動（加速度がゼロの）に，より似ていると言える．それゆえ，そのような物体は,相互作用している相手の物体より不動性が大きい，と言える．相互作用の時間(これは両物体に共通である）が，他の物体の速度を“変える”のに対して，この物体にとっては，自分の速度を変えるのに“十分ではない”のである．より大きな不動性を持つ物体は,小さな不動性を持つ物体より,長い時間をかけないと同じ速度変化を生じない．こういう訳で，不動性は物体の性質である．その量は質量で表され，これは最初ニュートンによって力学に導入されたものである．

（こじま　ひでお）

前回の練習問題（本誌1991年6月号）の正解

1） $v_0>(g/2h)^{1/2}l$，$\alpha=\sin^{-1}(h/l)$，ただし，gは地表における重力加速度．2） $v=2\sqrt{gl}$．3） $-\vec{v}_2+2\vec{v}_1$．4） $T=2\pi l^{3/2}(GM)^{-1/2}$，ただし，$G$は万有引力定数．