Basic 数学,
1991.6.

«Квант» для младших школьников

ソ連科学誌・クヴァントから

やさしい物理学 ――――⑤

小島　英夫（静岡大学）訳

1．力学の問題における基準系 A. チェルノヴザン（1990, No. 2, pp. 62〜66）

ボートで川を上流へ漕ぎ上っているうっかり者がA橋の下で帽子を流れに落した．しかし，それに気付かずに漕ぎ続け，15分後に帽子を落したのに気付いた．彼はボートを下流に向け，同じテンポで漕ぎ下り，A橋から1 km下流のB橋の下で帽子に追い付いた．川の流速はどれだけか？

基準系については故意に全く触れず，この非常に古く，今でも語られる古典的な問題を提出した．この問題は，次の事実を明瞭に示している．基準系を適切に選ぶと問題は著しく簡単になり，時には多くの物理の問題を暗算で解くことさえ可能となる．

上の問題で流速を求めるためには，実際に，帽子が二つの橋の間を運動するのに，どれだけの時間がかかったかを知る必要がある（帽子の速度が水の速度と同じである限り）．帽子に固定した基準系をとろう．この系では水は動かず，ボートの動く速さはどちら向きにも同じである．すなわち，ボートが帽子の方へ戻る時間は，帽子から離れる時間の15分に等しい．すると，帽子を落してから追い付くまでの全時間は30分であり，流速は

$$1\,\mathrm{km}/0.5\,\mathrm{h}=2\,\mathrm{km/h}$$

一つの基準系から，他の基準系へ移行するときには，物体の力学的運動を記述している多くの物理量――例えば，速度 $\vec{v}$，加速度 $\vec{a}$ など――は変化する．そのとき，対応する量の間に有名な和の法則がなり立つ：

$$\vec{v}_1=\vec{v}_{12}+\vec{v}_2,\quad \vec{a}_1=\vec{a}_{12}+\vec{a}_2$$

ここで，$\vec{v}_1(\vec{a}_1)$ は第1の基準系における物体の速度（加速度），$\vec{v}_2(\vec{a}_2)$ は第2の基準系における物体の速度（加速度），$\vec{v}_{12}(\vec{a}_{12})$ は第2の基準系の第1の基準系における速度（加速度）である*)．

すぐに気付くように，われわれは基準系相互の並進運動だけ（回転運動を含まない）を考えることにする．

それではここで，いくつかの具体的な問題を考察しよう．次のことに注意しておく．運動学に関しては，すべての基準系（静止している，一様に運動している，あるいは一様に加速している，さらに回転している，など）は同等である；基準系の選択は，単に便利さと合理的精神によって決められる．

問題1．川の流速が $\vec{u}$，静水におけるボートの速度が $\vec{v}_{\mathrm{rel}}$ である．最短の時間で流れを横切るには，ボートに乗っている人はどういうコースをとらなければならないか？

ここでは，二つの基準系を考えることが可能なことがわかる．最短時間の要請により，地球に固定した基準系に関して，偏差が最小である――ボートの速度 $\vec{v}$ と河岸に垂直な線とのなす角度が最小である．水に固定した基準系では，ボートの速さ v_{rel} が与えられ，その速度の向き，例えば $\vec{v}_{\mathrm{rel}}$ と岸に垂直な線とのなす角 α，を見出すことが要求される．何故ならば，“コースをとる”ということは，ボートの船体の向きを決めることを意味し，これは水が動かない基準系では，ボート

*）これらすべての問題の詳細は，論文“運動の相対性”（Basic数学1990，10月号，〈やさしい物理学〉(1)で取扱った．

の速度の向きと一致するからである。

問題の条件には，u と $v_{\rm rel}$ の相対的な大きさについては何も触れられていない．二つの場合が考えられる．

1） $v_{\rm rel}>u$．この場合には，岸に垂直な（偏差が全くない）．ボートの運動を保障することができる．速度の和の法則を書き表すと

$$\vec{v}=\vec{v}_{\rm rel}+\vec{u}$$

これを図示すると図1のようになる．直角3角形の性質から，次式を得る．

$$\sin\alpha=u/v_{\rm rel}$$

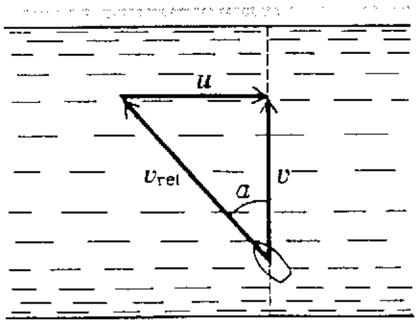

図1

2） $v_{\rm rel}<u$．速度の和の法則を表す等式は，この場合図2に示すようになる．コースを変えると，

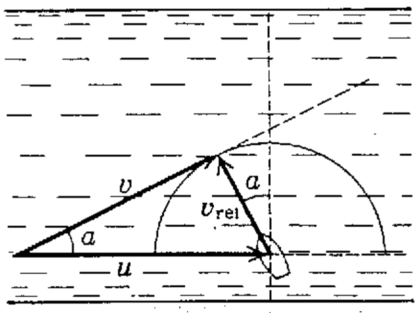

図2

と，$\vec{v}_{\rm rel}$のベクトルの先端は半円を描く．岸に垂直な線とベクトル $\vec{v}$ のなす角の最小値は，このベクトルが半円に接する条件に対応する．これから次式を得る．

$$\sin\alpha=v_{\rm rel}/u$$

このようにして，$v_{\rm rel}>u$ のときは $\sin\alpha=u/v_{\rm rel}$；$v_{\rm rel}<u$ のときは $\sin\alpha=v_{\rm rel}/u$ となる（$v_{\rm rel}=u$ の場合を，自分で調べてみよ）

何個かの物体の自由運動を考察する場合には，それらの物体の中の1個に固定した基準系をとるのが便利である．その系では，残りのすべての物体は直線的かつ一様に運動するだろう（空気の抵抗をここでは考えない）．このような考え方は，ときに“ミュンヒハウゼン男爵の方法”と呼ばれる（どうしてそう呼ばれるのか分りますか？）．この考え方を，次の問題で使ってみよう．

問題2．l だけ離れた2点の，地上から h だけ高い位置から，同時に小石を投げた．1個は速度 $\vec{v}_1$ で真上に，もう1個は第二の位置から第一の位置に向って速度 $\vec{v}_2$ で．2個の小石が運動している間に，その間の距離の最小値はいくらか？　二つの小石の最初の速度は同じ鉛直面内にあった．

第一の小石に固定した基準系をとろう．すると，第二の小石の運動は，速度が

$$\vec{v}_{\rm rel}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$$

の直線的で一様な運動になる（$\vec{a}_{21}=\vec{a}_2-\vec{a}_1=\vec{g}-\vec{g}=0$）．

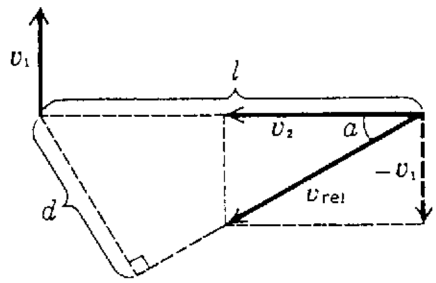

図3

石の間の最小距離は，図3から求められる：

$$d=l\sin\alpha=lv_1/\sqrt{v_1^2+v_2^2}.$$

注意．二個の小石が最も接近するのは，次の時間の後である：

$$t=l\cos\alpha/v_{\rm rel}=l\cos\alpha/\sqrt{v_1^2+v_2^2}$$
$$=lv_2/(v_1^2+v_2^2)$$

この時刻まで，第一の小石が地面に落ちないでいることが必要である．すなわち，次の条件がみたされねばならない：

$$lv_2/(v_1^2+v_2^2)\leq\sqrt{2h/g}.$$

次のような疑問が起るかもしれない：ここでは運動している小石に固定した基準系で，小石の間の最小距離を決定した；地球に固定した基準系では，答は違うのではないだろうか？　そうではない．答は同じである．二つの運動している点の間の距離は，不変量；すなわち一つの基準系から他へ移行したときに大きさが変化しない量，に

属する．古典力学における他の不変量の例としては，次のようなものがある：事象の間の時間間隔，物体の寸法，空間における物体の配置，など．

次に，動力学の問題に移ろう．そこでは，“許される”基準系の範囲は，厳しく制約をうける．非慣性基準系における作用法則は高等学校の物理の範囲を越えるから，慣性基準系だけを考えることにしよう．任意の慣性基準系で，われわれはおなじみのニュートンの3法則，エネルギーおよび運動量の保存則を用いることができる．

問題3．質量 M，長さ l の手押し車が，なめらかな水平面上にある．手押し車には，質量 m_1 と m_2 の，二人の人が両端に乗っている．もし，この二人が場所を交換したとすると，手押し車はどれだけ移動するか？

一方で，われわれは地球にたいする手押し車の変位に興味があり，他方で，二人の人の，地球にではなく，手押し車にたいする変位を知っている．どうしたらよいのか？

すべての物体―人間も，手押し車も―の運動が一様であると考え，ある時刻の手押し車の速度 v_t と同じ速度をもつ基準系をとろう．この基準系において，すべての物体の初速度は $-v_t$ である．“手押し車―人間”の閉じた系にたいして，運動量の保存則を書く：

$$-v_t(m_1+m_2+M)=v_{1,\mathrm{rel}}m_1+v_{2,\mathrm{rel}}m_2.$$

この式に運動の続く時間 $\varDelta t$ を掛け，対応する変位の間の関係を得る：

$$s_t(m_1+m_2+M)=-s_{1,\mathrm{rel}}m_1-s_{2,\mathrm{rel}}m_2.$$

明らかに，同じ関係が，運動の全時間における変位の総和にたいしても成り立つ．$s_{1,\mathrm{rel}}=l$，$s_{2,\mathrm{rel}}=-l$ であることを考慮して，次の結果を得る：

$$s_t=\frac{m_2l-m_1l}{m_1+m_2+M}=l\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2+M}.$$

この問題は，系の質量中心に固定した基準系でも，容易に解くことができる（このことを自分で確かめよ）*)．質量中心の座標と速度は，次の式によって与えられることを思い出そう：

$$x_c=\frac{m_1x_1+m_2x_2+\cdots+m_xx_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n},$$

$$\vec{v}_c=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2+\cdots+m_n\vec{v}_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

第二の等式から，次のことがわかる．もし，物体の系が閉じているなら，質量中心の速度は一定である．それゆえ，閉じた系の質量中心に固定した基準系は慣性系である．この基準系においては，物体系の全運動量は任意の時刻にゼロである．

質量中心に固定した基準系をつかって，次の問題を解こう．

問題4．なめらかな水平面上を，軽くて伸びない，長さ l の糸で結ばれた2個の小物体が運動している．ある時刻に，質量 m_1 の物体は静止しており，質量 m_2 の物体は糸に垂直な方向に速度 $\vec{v}$ をもっていた（図4(a)）．この瞬間における糸の張力を求めよ．

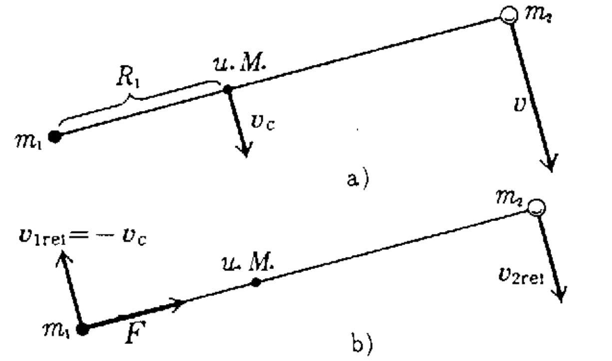

図4

問題の物体の系の質量中心は，第一の物体から $R_1=m_2l/(m_1+m_2)$ だけ離れた糸の上にあり，平面にたいして速度 $\vec{v}_c=m_2\vec{v}/(m_1+m_2)$ で動いている．質量中心がそこでは静止している基準系をとろう．この系では，物体 m_1 と m_2 は，静止した質量中心のまわりを円周にそって一様に運動する．そして第一の物体のこの基準系に関する速度は，大きさが v_c に等しい（図4(b)）．

ニュートンの第2法則により，第一の物体にはたらく糸の張力は，

$$F=m_1v_c^2/R_1$$

である．R_1 と v_c にたいする式を代入すると，答がえられる．

$$F=m_1m_2v^2/(m_1+m_2)l.$$

質量中心に固定した基準系に移行することによって，多くの場合に問題の解は簡単に求められ

*) 質量中心の性質については，例えば本誌1991，No.4掲載の記事“質量中心とは何か”に詳しく述べられている．

る．そのとき，まず最初に，すべての問題をこの基準系に移し，計算を行って結果を求め，それから初めの基準系に戻る，という操作を行う．例として，球の完全弾性衝突についての二つの例を考察しよう．

問題5．質量 m_1 と m_2 の2個の球が，それぞれ $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ の速度で完全弾性的に正面衝突した．衝突後の両球の速度を求めよ．

質量中心に固定した基準系では，2個の球の全運動量は，衝突の前も後もゼロである．次のことは容易に分かる；二つの保存則—運動量とエネルギー—は，各球の速度の向きを逆にすればみたされる．対応する公式を書こう：

質量中心基準系における両球の初めの速度 $\vec{u}_1$ と $\vec{u}_2$ は，

$$u_1 = v_1 - v_c = v_1 - (m_1v_1 + m_2v_2)/(m_1+m_2)$$
$$= m_2(v_1 - v_2)/(m_1+m_2),$$
$$u_2 = m_1(v_2 - v_1)/(m_1+m_2)\,;$$

質量中心基準系における両球の終りの速度 $\vec{u}_1'$ と $\vec{u}_2'$ は，

$$u_1' = -u_1,\quad u_2' = -u_2\,;$$

地球にたいする両球の終りの速度は，

$$v_1' = u_1' + v_c = -\frac{m_2(v_1-v_2)}{m_1+m_2} + \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}$$
$$= \frac{(m_1-m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1+m_2}$$
$$v_2' = u_2' + v_c = \frac{(m_2-m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1+m_2}$$

最後の例として，非中心弾性衝突についての問題を考察しよう．

問題6．質量 m_1 の球が速度 $\vec{v}_1$ で飛んできて，静止していた質量 $m_2(m_2<m_1)$ の球に衝突する．衝突によって質量 m_1 の球がそれる最大の角度はどれだけか？　両球は完全に弾性的で，なめらかであるとする．

質量中心基準系では（図5），両球の近づく速度は，

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_c = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2} = \frac{m_2\vec{v}_1}{m_1+m_2},$$
$$\vec{u}_2 = -\frac{m_1\vec{v}_1}{m_1+m_2},$$

かつ

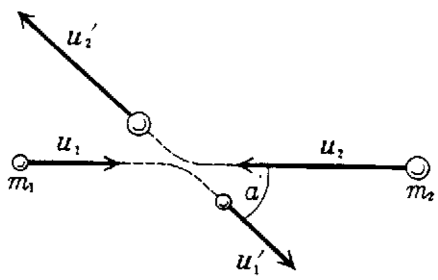

図5

$$m_1\vec{u}_1 = -m_2\vec{u}_2.$$

非中心衝突の結果，両球は前の速さを保持し，ふたたび互いに反対向きになる：

$$u_1' = u_1,\quad u_2' = u_2,\quad m_1\vec{u}_1' = -m_2\vec{u}_2'.$$

しかし，第一の球の終りの速度 $\vec{u}_1'$ は，初めの速度ベクトルに対して，ある角度 α だけ回転する．衝突の瞬間における両球の位置に応じて，この角は0°（球同志の軽い接触）から180°（正面衝突）まで変化する．ベクトル $\vec{u}_1'$ の終点の可能な位置は，半径 u_1 の円周上にある（図6）．第一の球の地球にたいする終りの速度は $\vec{v}_1' = \vec{u}_1' + \vec{v}_c$．$\vec{v}_1'$ と $\vec{v}_c$ のなす最大の角は，$\vec{v}_1'$ が円周に接するときに得られる．これから，求める角 θ_{max} は：

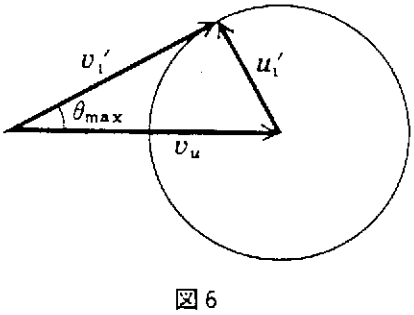

図6

$$\sin\theta_{max} = \frac{u_1}{v_c} = \frac{m_2v_1}{m_1+m_2}\Big/\frac{m_1v_1}{m_1+m_2} = \frac{m_2}{m_1},$$
$$\theta_{max} = \sin^{-1}\frac{m_2}{m_1}.$$

練習問題（正解は次回にのせる）

1．物体が自由落下をはじめる瞬間に，ある人が小石を投げて物体に当てようとする．はじめ，物体がその人から l だけ離れた，高さ h の位置にあった（図7）とすると，小石の初速度（水平となす角および速さ）はどれだけでなければならないか？

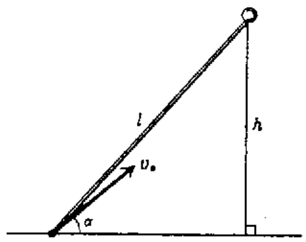

図7

2．小さな錘が長さ l の糸でつるされている．糸の

支点をどれだけの速さで水平に動かしたら，錘は完全な円を描くか？

3．弾性的で，なめらかな壁が速度 $\vec{v}_1$ で動いている．弾性的な球が，壁に向って，壁に垂直に速度 $\vec{v}_2$ で飛んでいる．壁との衝突直後の球の速度を求めよ．

4．万有引力の法則にしたがって引き合う二つの星が，つねに距離 l を保ちながら，円形軌道を描いて運動している．この連星の質量が M のとき，その回転周期を求めよ．

2．自由落下する物体にたいする“奇数の法則”I.K. ベルキン (1984, No. 12, p. 17)

地球上で自由落下する物体の運動は，よく知られているように，$g=9.81\ \mathrm{m/s^2}$ の等加速度運動である．最初，地球にたいして静止していた物体の場合には，自由落下の法則は，数学的に方程式

$$h=\frac{gt^2}{2} \tag{1}$$

で表される．ここで，h は物体の（鉛直方向の）変位，t は落下しはじめてからの時間である．

公式(1)は，一つの面白い結論をもたらすことが知られている．これについては，普通，教科書では書かれないが，自由落下の法則を発見したガリレイは，すでにそれを知っていた．それ自身を法則と考えることもでき，それをつかって具体的な問題を解くこともできる．

問題の結論とは，どんなものなのだろうか？

公式(1)は，明らかに，任意の時間後の，とくに時間 $t=n\Delta t$ 秒後の物体の変位を計算するのに用いられる（ここで $n=1, 2, 3, \cdots$, $\Delta t=1$ 秒）．それぱかりでなく，この公式をつかうと n 秒間の変位ばかりでなく，n 秒の中の各 1 秒，すなわち，第 1，第 2，第 3 などの 1 秒間の変位をも決定することができる．

実際，もし n 秒間の物体の変位が h_n で，$(n-1)$ 秒間のそれが h_{n-1} であると，n 番目の 1 秒間の変位 $h(n)$ は，h_n と h_{n-1} の差に等しい：

$$h(n)=h_n-h_{n-1}=\frac{g(n\Delta t)^2}{2}-\frac{g((n-1)\Delta t)^2}{2}$$

$$=\frac{g}{2}((n\Delta t)^2-((n-1)\Delta t)^2$$

$$=\frac{g^2(\Delta t)^2}{2}(2n-1) \tag{2}$$

公式(2)から，次のことがわかる．最初の 1 秒間の変位 $h(1)$ は次のように与えられる：

$$h(1)=\frac{g(\Delta t)^2}{2}.$$

同様にして，それ以降の 1 秒間の物体の変位は次のようになる：

$$h(2)=3\frac{g(\Delta t)^2}{2},\quad h(3)=5\frac{g(\Delta t)^2}{2},$$

$$h(4)=7\frac{g(\Delta t)^2}{2},\quad h(5)=9\frac{g(\Delta t)^2}{2}$$

$$h(6)=11\frac{g(\Delta t)^2}{2},\quad \cdots h(n)=(2n-1)\frac{g(\Delta t)^2}{2}$$

このようにして，相次ぐ 1 秒毎の変位の比は，1：3：5：7：9：11：…：$(2n-1)$，すなわち奇数の数列となる（任意の n にたいする $(2n-1)$ は奇数であることに注意しよう）．

面白いことに，ガリレイが物体の自由落下の法則を定式化したのは，正に，この形においてであった．ガリレイ自身の言葉によればこうである：《同じ時間内に落下する物体が通過する距離の比は，相次ぐ奇数の比に等しい》

“奇数の法則”が，物体の自由落下の場合だけに成り立つと考えるべきではない．この法則は，初速度がゼロの任意の等加速度運動にたいして成り立つ，ことがわかる．この法則性は，等加速度運動のとき，物体の変位が時間の 2 乗に比例することから直接導びかれる，からである．また，この“法則”は，変位を考える時間を 1 秒にとったときにだけ成り立つ，と考える必要もない．それはもちろん，ガリレイも気付いていたように，任意の等しい時間にたいして正しい．

最後に，等減速運動の場合に，“奇数の法則”がどうなるか，を読者が自分で考えてみることをおすすめしたい．

（訳　こじま　ひでお）