Basic 数学
1991. 2.

«Квант» для младших школьников

ソ連科学誌・クヴァントから

やさしい物理学 ——— ❸

小島　英夫（静岡大学）訳

1．平均速度について (1986, No. 9, pp. 25～27)

われわれをとりまく世界における種々の物体の運動の速度について語るとき，多くの場合に**平均速度**を考えているのである．つまり，運動した時間を知っていて通過した距離を計算したり，あるいは逆に通過した経路の長さから運動時間を求めたりするときに平均速度が用いられる．例えば，町の端から向う側にある駅へ行こうとするときには，経験的に知っている交通機関の平均速度をつかって所要時間を計算することができる．そのような計算には，バスや電車の駅の間での各時刻における速度の変化は問題にしなくてもよい．

実際の，複雑で不均質な運動の平均速度を決めるということは，実際の運動が起ったのと同じ時間内に物体が通過したのと同じ経路（あるいは同じ距離）を，単純な均質な運動で代用することを意味する．

ここで，平均速度の 2 種の概念の区別をはっきりさせておこう：**ベクトル的平均速度**は，一定の時間 t の間の物体のベクトル的変位 $\vec{s}$ をつかって計算され，**スカラー的平均速度**（平均の速さ）は，経路にそって物体が通過した距離 l によって決められる：

$$\vec{v}_{cp}=\frac{\vec{s}}{t},\quad v_{cp}=\frac{l}{t}.$$

一般に，平均の速さはベクトル的平均速度の絶対値と等しくない．例えば，地球の太陽のまわりの軌道運動の v_{cp} は約 30 km/s であるが，一年間についての平均ベクトル速度は明らかにゼロである．二つの平均速度の大きさが等しいのは，物体が一方向に直線運動する場合だけである．以下ではスカラー的平均速度だけを考えることにする．次のような例から始めよう．

あなたが自動車で運転手の横に坐って，無人の郊外高速道路を走っているとしよう．あなたは手にストップウォッチを持ち，窓から距離標識を見ながら，ちょっとした実験を行うことにする．第一の実験では，運転者はあなたの指示に従って，**1 分ごとに**“段階的に”速度を変える：$v_1=40$ km/h，$v_2=60$ km/h，$v_3=80$ km/h，$v_4=20$ km/h．次にもう一つの実験を行う：運転者は第一の実験と同じ順序で次々に速度を変えるが，あなたはストップウォッチに従ってではなく，自動車が **1 km 毎の**距離標識を通過する毎に指示をする．この二つの実験走行における平均速度は，同じだろうか？

第一の場合には，自動車は速度が一定の区間を同じ時間間隔 Δt だけ走る（図 1）．それゆえ，平均速度は

$$v_{cp1}=\frac{l}{t}=\frac{v_1\Delta t+v_2\Delta t+v_3\Delta t+v_4\Delta t}{4\Delta t}$$

$$=\frac{1}{4}(v_1+v_2+v_3+v_4)=50\ \text{km/h}.$$

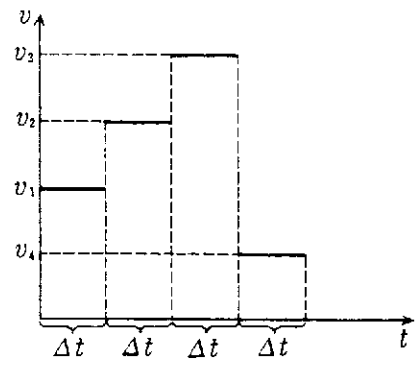

図 1

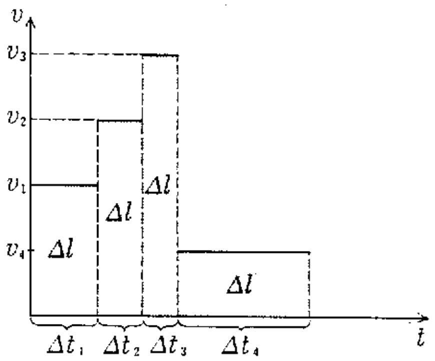

図2

第二の実験では，各区間で同じなのは運動する時間ではなく，その間に走行する距離 Δl である（図2）．したがって，平均速度は

$$v_{cp2}=\frac{l}{t}=\frac{4\Delta l}{\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3+\Delta t_4}$$

$$=\frac{4\Delta l}{\frac{\Delta l}{v_1}+\frac{\Delta l}{v_2}+\frac{\Delta l}{v_3}+\frac{\Delta l}{v_4}}$$

$$=\frac{4}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}+\frac{1}{v_4}}=38\ \mathrm{km/h}.$$

これで解るように，第一の場合には，平均速度は各運動区間における速度の算術平均で与えられる．残念なことに，どんな型の運動においても平均速度は算術平均で計算できる，と誤解している人が多い．以上の例でわかるようにそれは正しくない．第二の場合で示されたように，同じ距離を（違った速度で）運動する場合には，平均速度はずっと複雑な式で表される：

$$\frac{1}{v_{cp}}=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\cdots+\frac{1}{v_n}\right).$$

したがって，平均速度を計算するときには，いつでも正しい一般公式を用いる必要がある．

平均速度を，瞬間的な速度の大きさの時間依存性のグラフをつかって求めることがある（図3）．曲線 $v(t)$ の下の面積は，物体が通過した距離を与えるから，グラフから平均速度を決めて，速度の変化する真の運動と同じ時間に同じ距離を通過することのできる一定の速度の値を選ぶことができる．

平均速度はまた，時間にたいする距離の依存性 $l(t)$ のグラフから決定することもできる．$v_{cp}=l/t$ であるから，平均速度はそのグラフの，問題にしている運動区間の始点と終点を結ぶ直線の，時間軸に対する角の対数で与えられる（図4）．このグラフをつかうと，平均をとる時間区間の選び方による平均速度の変化を容易に考察することができる．対応する区間の直線をひき，その時間軸に対する傾きの角を比較すればよい．このようなグラフを用いた解析は，平均速度の概念が，経路（または時間）の一定の区間を決めたとき，はじめて意味を持つことを明示している．

例えば，直線不均一運動の場合の，距離の時間依存性をつかうと，瞬間的な速度の絶対値が，考えている運動区間の平均速度の大きさに等しい時刻を，容易に見つけ出すことができる（図4）．そのためには，考えている区間の $l(t)$ 曲線の始点と終点を結ぶ線分をひき，その線分を平行移動してグラフと接触する点を見つければ，求める点が決められる．

平均速度の大きさは，物体の速度の可能な極限値を，運動の個々の区間にたいして，計算することを可能にすることがある．たとえば，経路の二つの同じ長さの区間全体での運動の平均速度が 12 m/s に等しいことを知っていると，二つのうちの一方の区間での運動の平均速度の値は，6 m/s より小さくはないことが直ちに解る（その理由を考えてみてください）．　A.I. シャピロ

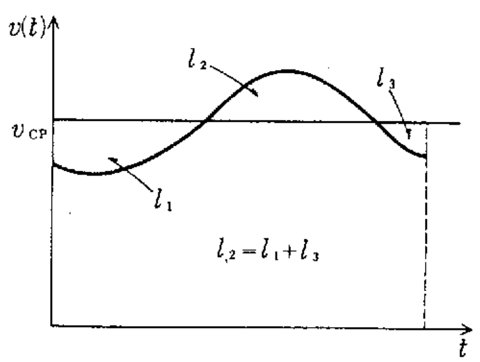

図3

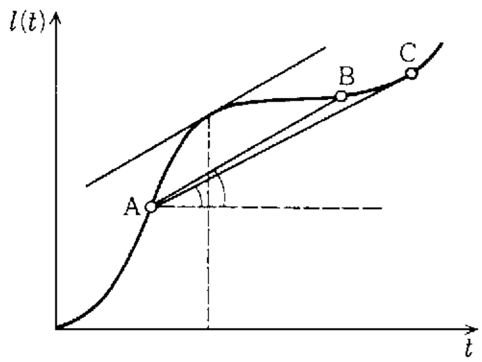

図4

2 . 平行な2力が物体におよぼす効果 (1985, No. 2, pp. 23-25)

1個の質点にはたらく二つの力の合力の求め方はよく知られている(図1). それらの力を表すベクトルを2辺とする,平行四辺形ができる;力の作用する点を末端とする,矢印をつけた対角線が, 合力を表すベクトルになる.

二つの力が質点にではなく,図2に示すように1個の**物体**にはたらく場合にも,合力は同じように求められる.力の作用点は力の作用線に沿って移動させてもかまわないことを使って,二つの力の作用線が交わる点Cを見出す. 力 $\vec{F}_1$ と $\vec{F}_2$ がこの点に作用していると考えて平行四辺形をつくり,対角線をひく.点Cが物体の外にあったとしても, 合力の作用点は, 合力の作用線の上の任意の点にとってよい. 実際, どのような点を選んでも,合力 $\vec{F}$ は $\vec{F}_1$ と $\vec{F}_2$ が同時にはたらいたのと同じ加速度あるいは力のモーメントを物体に与える.

力が平行なとき, すなわち同じ向きであるとき. 平行な, 同じ向きの二つの力が物体にはたらいたとしよう(図3). このような力の作用線はどこでも交わらず,平行四辺形をつくることはできない. それでもやはり, それらの力を加え合せ, その合力を求めることができる.

合力が二つの力と同じ向きにあり,その大きさは二つの力の大きさの算術的な和になることは容易にわかる.ところで合力の作用点はどこだろうか? 換言すれば,物体が平衡になるためには合力と向きが反対で大きさの等しい力を,どの点に作用させればよいだろうか?

二つの, 平行で, 向きの同じ力の合力の作用点を見出すには,力のモーメントの規則を用いればよい. 点AとBを結ぶ直線をひく(図3). この直線の上のどこかに,合力の作用点があることは明らかである.その点がOであるとしよう.この点を通って二つの力を含む面(すなわち紙面)に垂直に固定軸を考える. もしOが合力の作用点であれば,物体は平衡にある一合力は軸からの反作用力と釣合う.逆に, もし固定軸をもつ物体が平衡にあれば,この軸に関する力のモーメントの代数和はゼロになる筈である.図3からわかるように, 力 $\vec{F}_2$ が単独にはたらいたとすると, 物体

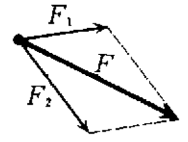

図1

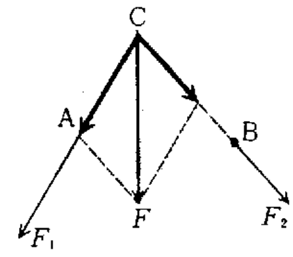

図2

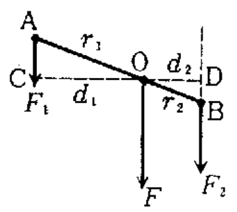

図3

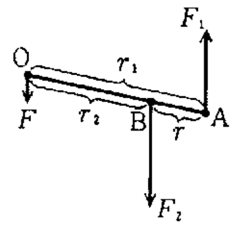

図4

をOのまわりに時計回りに回転させようとし, その力のモーメントは $+F_2d_2$ である. 他方, 力 $\vec{F}_1$ は単独ではたらいたとき物体をOのまわりに反時計回りに回転させようとし,その力のモーメントは $-F_1d_1$ である(ここで d_1 と d_2 は, 力 $\vec{F}_1$ と $\vec{F}_2$ のアーム(腕)と呼ばれる).

したがって次式が成り立つ;

$$F_2d_2-F_1d_1=0,\ \text{すなわち}\ \frac{F_1}{F_2}=\frac{d_2}{d_1}.$$

三角形AOCとBODは相似だから, $d_1/d_2=r_1/r_2$ が成りたつ. それ故, 最終的に次式を得る;

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{r_2}{r_1}.$$

すなわち, 次のように言うことができる. **平行で同じ向きの二つの力の合力は, 2力の作用点を結ぶ線分をそれらの力の大きさの逆比に分ける点にはたらく**. 明らかに, この点は二つの力のうち大きな力の方に近い.

2力が平行で向きが反対なとき. 物体にはたらく二つの力が,平行だが向きは反対な場合がある(図4). このときは, 合力 $\vec{F}$ の作用点は, 力 $\vec{F}_1$ と $\vec{F}_2$ の作用点の間には存在しない. というのは, それらの点の間にある任意の点に関しては, 各々の力は物体を反時計まわりに回転させようとし, 二力のモーメントの符号は同じで, それらの和はゼロにならず, したがって平衡にならない

からである．

容易に推量できるように，合力の作用点は大きな力の作用点の**外側**にあり，図4にそれを示した．合力の大きさは力 $\vec{F}_1$ と $\vec{F}_2$ の大きさの差に等しい．

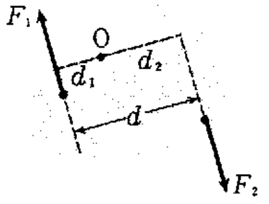

図5

合力の作用点はどこになるだろうか？　大きな力の作用点からの距離 r_2 はどれだけか？　ふたたび力のモーメントの規則を用いる：

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{r_2}{r_1},\ \text{すなわち}\ F_2=F_1\frac{r_1}{r_2}.$$

第二の式の右辺および左辺から F_1 を引いて：

$$F_2-F_1=F_1\frac{r_1}{r_2}-F_1=F_1\left(\frac{r_1}{r_2}-1\right)=F_1\frac{r_1-r_2}{r_2}.$$

これから

$$r_2=\frac{F_1(r_1-r_2)}{F_2-F_1}=\frac{F_1 r}{F_2-F_1}. \qquad (*)$$

すなわち，**平行で反対向きの二つの力の合力の作用点は，2力の大きさの差に反比例した距離だけ大きな力の作用点から離れている．**

偶力． 物体に平行で，向きが同じか反対の二つの力が作用したとき，いつでもそれらの2力の合力の大きさと向き，およびその作用点を決定できることがわかった．もしその点に，合力と大きさが等しく向きが逆の力を作用させれば，物体は平衡になる――すなわち，物体は並進運動も，回転運動もしない――．

しかし，合力が見つからない場合が存在することに気づくだろう．**物体に，二つの，平行で向きが逆の，大きさの等しい力が作用する場合**である．そのような力は，**偶力**を形づくっていると言う．その合力の大きさは確かにゼロである．しかし公式（*）から，$F_2-F_1=0$ のとき，合力の作用点までの距離 r_2 は無限大となり，したがってそのような点は存在しない．実際に，存在しない合力の作用点とは何を意味するのだろうか？

しかし，偶力がはたらいたとき物体が平衡になり得ない――物体は回転する――ことは，図5を見ればすぐに了解できる．つまり，偶力には回転モーメントが附随するのである．ではどんな軸に関してか？　偶力を形づくる2力のメーメントの和は，それらの力を含む面（紙面）に垂直な任意の軸に対して同じであることは，容易に示すことができる．実際，任意の点Oを考え，そこに回転軸をとろう．力 $\vec{F}_1$ のその軸に関するモーメント M_1 は F_1d_1 に等しく，力 $\vec{F}_2$ のその軸に関するモーメント M_2 は F_2d_2 に等しい．2力のモーメントの和 M は M_1+M_2 に等しい：

$$M=F_1d_1+F_2d_2.$$

$F_1=F_2=F$ であるから，

$$M=F(d_1+d_2)=Fd,$$

ここで d は偶力の成分の2力の，作用線の間の距離であり，**偶力のアーム（腕）**と呼ばれる．すなわち，**偶力のモーメントは，一方の力の大きさと偶力のアームの積に等しい．**それゆえ，単に偶力のモーメントと呼んで，どの軸に関して，と断らないのである．

偶力の作用した物体は，どれもそのように振舞うのだろうか？　この問いに答えるには，物体の質量中心が，あたかも物体の全質量がそこに集中し，物体に作用するすべての力がそこに作用するように運動するということを思い出そう（この事実は物理学において**質量中心の運動に関する定理**と呼ばれる）．しかし，もし力の和がゼロになると，質量中心は位置を変えることができない（力が作用するまでは，確かに物体は静止している）．物体に偶力が作用すると，力の和はちょうどゼロであり，質量中心の運動は起らない．物体は，しかし，回転する．つまり，物体は質量中心を通る軸（力を含む面に垂直な）のまわりに回軸する（回転軸上のすべての点は静止している）．物体の質量中心を通る回転軸は特別で，そこにはどんな力もはたらかない．

3．単純な機械の原理 (1985, No. 4, pp. 17-19)

物体のつり合いと力の仕事． ちょっと見ると，“つり合い”と“仕事”という二つの概念は互いに相いれないように思われる．というのは，力が仕事をするのは，動くことのできる物体に作用したときだけである；ところでつり合い（平衡）は，運動が起らないことに関係しているように思

われるのだから．しかしながら，物体のつり合いとその物体に作用する力との間には関係がある．挺子（てこ）を例にとってそれを説明しよう．

挺子—最も古く，単純な機械の一つ．よく知られているように，挺子のつり合いのためには，それに作用する力のモーメントの代数和がゼロにならねばならない：

$$F_1d_1=F_2d_2,\ \text{あるいは}\ \frac{F_1}{F_2}=\frac{d_2}{d_1}. \qquad (1)$$

ここで F_1 と F_2 は挺子にはたらく力の大きさで，d_1 と d_2 はそれらの力のアーム（腕）である（図1）．

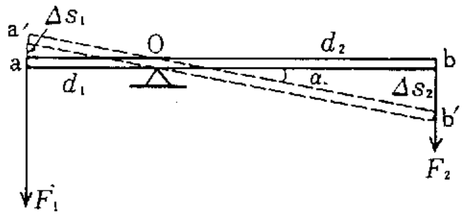

図1

つり合いの条件は，しかし，他の形にも表すことができる．挺子の支点をOとする—これは固定軸で（より正確にはその紙面への射影で），そのまわりに挺子は回転することができる．回転する際に，力の作用点aとbは点Oを中心とする弧を描いて運動する．

挺子がある小さな角度 α だけ回転したと仮定しよう．すると，力の作用点はそれぞれ小さな変位 $\Delta\vec{s}_1$ と $\Delta\vec{s}_2$ を行う，と考えられる．

三角形aa′Oとbb′Oが相似であるので，$d_2/d_1=\Delta s_2/\Delta s_1$ がなり立つ．等式(1)の代りに次の式が書ける：

$$\frac{F_1}{F_2}=\frac{\Delta s_2}{\Delta s_1},\ \text{あるいは}\ F_1\Delta s_1=F_2\Delta s_2. \qquad (2)$$

$F_1\Delta s_1$ という量は，力 $\vec{F}_1$ が微小変位 $\overrightarrow{\Delta s}_1$ に際してなした仕事であり，変位ベクトル $\overrightarrow{\Delta s}_1$ と力のベクトル $\vec{F}_1$ が逆向きなのでその符号は負である．まったく同様に，$F_2\Delta s_2$ は微小変位 $\overrightarrow{\Delta s}_2$ に際して力 $\vec{F}_2$ のなした仕事であり，その符号は正である．これから次のことがわかる：**挺子がつり合いにあるとき，挺子に作用している力が作用点の微小変位に際してする仕事の代数和はゼロになる．**

挺子の端（力の作用点）の実際の，任意の小さな運動は円弧にそって行われる．しかしそれはいつでも，事実上線分と一致する小部分に分けることが原理的に可能である．それらの小変位の力の向きへの射影に力を掛ければ，その変位に際しての力のなした仕事が得られる．全体の仕事はすべての部分の仕事の和に等しい：

$$F_1s_1=F_2s_2,\ \text{すなわち}\ \frac{F_1}{F_2}=\frac{s_2}{s_1}. \qquad (3)$$

このようにして，挺子の動作の基礎には次の規則が存在することがわかる：**作用する力の比は力の作用点の変位の逆比に等しい．**

この規則には，挺子の動作の“秘密”が含まれていることがわかる．例えば，もし挺子をつかって荷物を持上げるとする（図2）．力 $\vec{F}$ のする正の仕事（“入力”の仕事）は重力 $m\vec{g}$ のする負の仕事（“出力”の仕事）に等しい．しかし図2から分るように，荷物の行う変位は，力 $\vec{F}$ が作用する挺子の端の変位より小さい．公式(3)によれば，荷物にはたらく重力の大きさは，F より同じ割合だけ大きい．“出力”の力の“入力”の力にたいする（大きさの）比は，挺子の伝達数と呼ばれる（時に挺子の力学的利得とも呼ばれる）．挺子は俗に言われるように力を“稼ぐ”ことができる．しかし全体の稼ぎはどこかで償わねばならない．償却は変位の“負け”でなされる：“入力”における変位が“出力”における変位より大きい割合は，“出力”における力が“入力”における力より大きい割合と同じである．

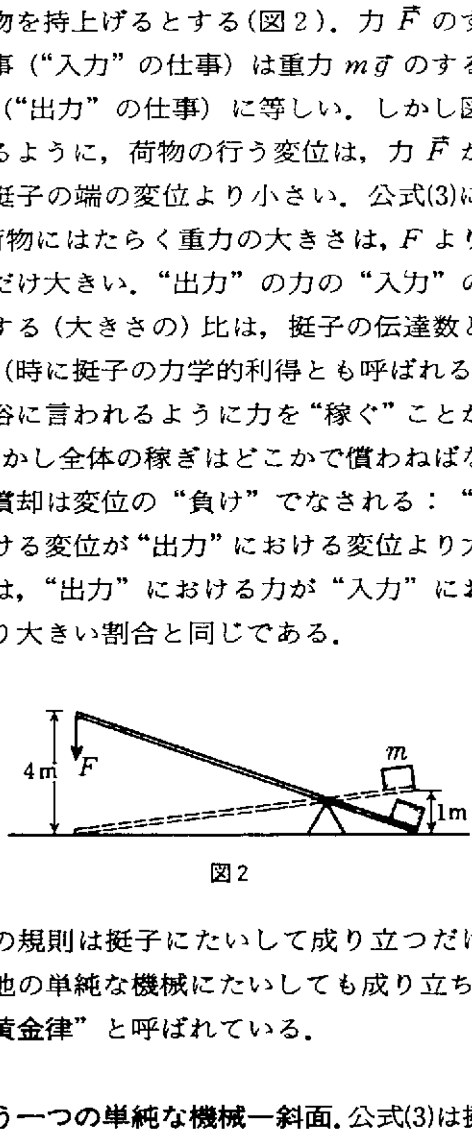

図2

この規則は挺子にたいして成り立つだけでなく，他の単純な機械にたいしても成り立ち，**“力学の黄金律”**と呼ばれている．

もう一つの単純な機械—斜面．公式(3)は挺子にだけ適用できるのではない．単純な機械と呼ぶことのできるもう一つの装置は，滑らかな斜面である（図3）．例えばもし，質量 m の荷物を高さ h だけ持ち上げなければならないとすると，鉛直線に沿って静かに動かすときに荷物に加えるべき力は荷物の重さ mg に等しい．しかし，もしその

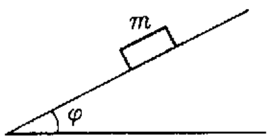

図 3

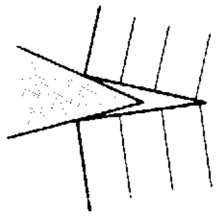

図 4

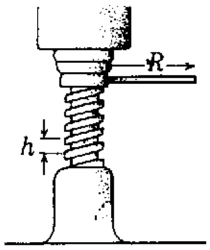

図 5

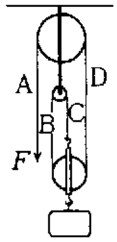

図 6

荷物を長さ l の斜面に沿って静かに動かすときには，l が h にたいして大きい割合だけ，mg に比して小さい力で充分である．したがって，力の利得（伝達数）は比 l/h である．ところで $l/h=1/\sin\varphi$ であるから，斜面にたいする力の利得は $1/\sin\varphi$ に等しい；ここで φ は斜面が水平面にたいしてなす角である．

斜面は，梃子と同様に，歴史以前から人々に用いられてきた．また昔から斜面の変種である楔（くさび）とねじも用いられている．楔（図 4）は二つの斜面を一緒にした構造をもち，ねじは軸のまわりに捲きついた斜面である．ねじをつかった装置の例として，ねじジャッキを図 5 に示した．図 5 から，荷物を h（ねじの歩み）だけ上げるためには，力の作用する柄の端を $2\pi R$ だけ動かさねばならない（R はねじの軸から柄の端までの距離である）．明らかに，この場合の力の利得は比 $2\pi R/h$ に等しい．したがって，“入力”の力は，“出力” の力より $2\pi R/h$ 倍だけ小さい．

梃子の変種一滑車．単純な機械のもう一つの重要な形態は，滑車に関するものである．不動滑車自体は梃子の変種であるが，アームの等しい梃子は力の利得を与えない．しかし，可動および不動滑車の種々の組合せが，大きな力を小さな力に変換するのに梃子や斜面と同様に用いられ得ることが知られている．

図 6 には典型的な滑車の組合せである複滑車を示した．ロープの自由端 A に加えられた力 F は滑車によりロープ B，C および D に伝えられる．それらの各々は荷物に F の力を及ぼす．それらの合力は $3F$ の力となる．したがって“出力” の力は“入力” の力より 2 倍だけ多い．しかし荷物をたとえば 1 m 持ち上げるときは，B，C および D のロープがそれぞれ 1 m だけ短くならねばならず，ロープの自由端 A は，3 m 長くならねばならない．これが力の利得の “代償” である．

＊　＊　＊

上に述べたように，すべての単純な機械の“技術”の基礎は，梃手と斜面である．古代から，梃子と斜面，そしてその変種と組合せが，人々の労働を容易にした（力の利得！）．人類のかなり大きな進歩（数千年の！）にもかかわらず，それらの重要性は今日も失われていない．しかし現在は，単純な機械が人間や動物の筋力で動かされるのではなく，現代的な機械一動力機（電気的，熱的，水力など）によって動かされている．

12月号の練習問題の正解．

1．$mgH+mMv^2/2(m+M)$,

2．$\frac{v}{2}(m_1^2v_1^2+m_2^2v_2^2+2m_1m_2v_1v_2\cos\alpha)^{1/2}-\frac{1}{2}m_1v_1^2-\frac{1}{2}m_2v_2^2$,

3．$mv\{k(m+M)\}^{-1/2}$,

4．$Mv^2/2g(m+M)$,

5．$-\{2m^2gl(1-\cos\alpha)/M(m+M)\}^{1/2}$.

（訳　こじま　ひでお）