Basic 数学
1990.12

ソ連科学誌・クヴァントから

«Квант» для младших школьников

やさしい物理学 ―― ❷

小島　英夫（静岡大学）訳

1. 運動量と運動エネルギー (1985, No. 5, 28-29ページ)

力学の基本概念の一つは，物体に作用した力がその物体の速度の変化の原因だ，ということである．ニュートンの第二法則は，この考えを表している：

$$m\vec{a}=m\frac{\vec{v}_2-\vec{v}_1}{t}=\vec{F}.$$

力学においては，速度に関係したもう二つの量が用いられる．それは物体の運動量と運動エネルギーである．物体の**運動量** $\vec{P}$ はベクトル量であり，（定義により）物体の質量と速度の積に等しい：

$$\vec{P}=m\vec{v}.$$

物体の**運動エネルギー** E_k はスカラー量であり，（定義により）物体の質量と速度の2乗の積の半分に等しい：

$$E_k=\frac{mv^2}{2}.$$

運動量と運動エネルギーが物体の速度に直接関係しており，他方速度の変化は物体に作用する力によって引き起こされるから，運動量と運動エネルギーの変化も力に関係していることは明らかである．

物体の運動量についての関係は，ニュートンの第二法則から直接導びかれる．この法則は次の形に書ける：

$$\vec{P}_2-\vec{P}_1=\vec{F}t. \qquad (1)$$

したがって，物体の運動量の変化は，力とその力が作用した時間の積，すなわち**力積**に等しい．

物体の運動エネルギーと力の関係は，次の形に表せる：

$$E_{k2}-E_{k1}=Fs\cos\alpha=A, \qquad (2)$$

ここで s は物体の変位ベクトル $\vec{s}$ の大きさ，α はベクトル $\vec{F}$ と $\vec{s}$ のなす角であり，積 $Fs\cos\alpha=A$ は，物体に作用した力のなした**仕事**である．したがってこの式は，物体の運動エネルギーの変化が力によって物体になされた仕事に等しい，ことを表す．

運動の記述における運動量と運動エネルギーの役割

二つの量 $\vec{P}$ と E_k の違いは，一方がベクトル量で他方がスカラー量である，ことだけにとどまらない．

式(1)から次の事が分かる，もし力 F が与えられると，運動量の変化は力の作用する時間だけに依存し，どの物体に力が作用するかには依存しない．任意の物体（任意の質量の物体）に，ある力がある時間だけ作用すると，その物体の運動量は同じ量だけ変化する．さらに例えば，クルイロフの寓話の主人公の象と狆（小型の犬）とが衝突したとしても，それぞれの運動量の変化は同じである．

式(2)は次の事を述べている：力が作用したときの物体の運動エネルギーの変化は，力の作用した方向への物体の変位だけによって決められる（積 $s\cos\alpha$ は変位の力の方向への射影である）．与えられた力の作用の下で，与えられた距離だけ変位した任意の物体には，同じ量だけの運動エネルギーの変化が生じる．

それゆえ，運動量の変化は物体の速度変化に必要な時間間隔に関係しているのに対して，運動エネルギーの変化は，（与えられた力による）物体

の速度の変化のために，物体が変位しなければならない距離に関係している．

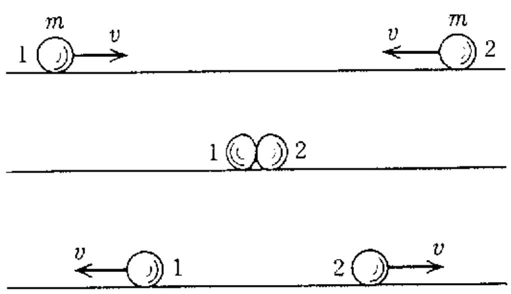
換言すれば，運動量の変化は力の作用の時間的特性であり，運動エネルギーの変化は力の作用の空間的特性である．

運動量と運動エネルギーのもう一つの差違

おそらく，物体の運動量の最も著しい性質は，閉じた系の物体の全運動量（すなわち，系内のすべての物体の運動量のベクトル和）は，その系の物体の任意の相互作用と任意の運動にたいして不変に保たれる，ことであろう．これを**運動量保存の法則**という．

運動エネルギーは，“保存される”性質を持っているだろうか？　簡単な例を考えてみれば，運動量と運動エネルギーとが違うことが直ちに明らかになるだろう．

滑らかな（摩擦のない）水平な面に沿って，同じ質量 m をもつ2個の同じ大きさの小球（鋼鉄製とする）が，同じ大きさの速度 v で逆向きに一直線上を運動しているとしよう（図を見よ）．



ある瞬間に二つの球は接触し，ある時間だけさらに接近し，それから離れはじめ，ついに始めと同じ速さで逆方向へ動きだす．

衝突するまで，したとき，およびした後の，両球の全運動量と全運動エネルギーの大きさを考えてみよう．

衝突するまででは，二つの球の運動量は向きが反対で大きさは等しい．したがって，

$$\vec{P}_1+\vec{P}_2=(m\vec{v})+(-m\vec{v})=0.$$

一方，二つの球の運動エネルギーは同じで $mv^2/2$ に等しいから，

$$E_{k1}+E_{k2}=\frac{mv^2}{2}-\frac{mv^2}{2}=mv^2.$$

衝突した瞬間には，二つの球は静止し，その速度はゼロになる．したがって，

$$\vec{P}_1+\vec{P}_2=0,$$

$$E_{k1}+E_{k2}=0.$$

衝突の後では，二つの球は衝突前と同様に，反対向きに，同じ大きさの速度で動いていく．したがって，

$$\vec{P}_1+\vec{P}_2=-m\vec{v}+m\vec{v}=0,$$

$$E_{k1}+E_{k2}=\frac{mv^2}{2}+\frac{mv^2}{2}=mv^2.$$

したがって，二つの球の系の全運動量はつねに同一である．他方，運動エネルギーは衝突の前と後とで同じである（このような衝突を**弾性的**であるという）が，衝突の瞬間に消滅しさえする．すなわち，運動量保存の法則は存在するが，運動エネルギー保存の法則は存在しない．

もし球が鋼鉄でできているのでなく，軟らかい粘土かプラスチリン（彫塑用粘土）で出来ているとすると，それらが衝突したときくっつき合い，そのまま停止してしまうだろう（このような衝突を完全に**非弾性的**であるという）．それらの全運動量は前の場合と同様にゼロであるが，運動エネルギーは衝突の瞬間に消滅し，永遠に戻らない．

エネルギーにたいしても保存則が存在することはよく知られているが，それは運動エネルギーに対してではなく，他の形のエネルギーを含めた**全エネルギー**に対してである．したがって，二つの球の弾性衝突の際に運動エネルギーが一時的に消失した上の例は，その瞬間に運動エネルギーが球の弾性変形のポテンシャル・エネルギーに完全に変換されていたことを示している．衝突の後では，ポテンシャル・エネルギーはふたたび運動エネルギーにそっくり変換される．非弾性衝突の場合には，球の運動エネルギーは球の内部エネルギー（球が加熱される）に変化し，それがさらにもとの運動エネルギーに変換されることはない．

2．エネルギーと運動量の保存則 (1989, No. 4, 60-64ページ)

この記事では，種々の物理の問題を解く時に，二つの保存則—エネルギーと運動量の保存則—

を同時に用いる際に注意すべきことを考察する．

物理学の問題を解くときに，解答者が個々の保存則はよく知っているのに，一つの問題に適用するためにそれらを結合することにたいして“心理的”抵抗を感ずることがある．しかも，われわれにとってより簡単な運動量保存則が，より頻繁に忘れられ易い．解答者はエネルギーにたいする保存則を書きながら，運動量にたいする保存則を考慮するのを忘れ，困難に陥る．もちろん，反対の場合も起る．

エネルギーと運動量を同時に“協力させる”ことにより必要な結果が得られる，具体的な例のいくつかを考察しよう．

問題 1．同じ材料からできていて，質量が m_1 と m_2 の2個の球が，速度 $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ で対向して運動している．球の材料の物質の比熱が c のとき，完全非弾性的に正面衝突したさいに球の温度はどれだけ上昇するか？　両球のはじめの温度は等しいものとする．

［**解答**］　球の温度変化 Δt は，その内部エネルギーの増加 ΔE_{in} によって決定される：

$$\Delta E_{in}=c(m_1+m_2)\Delta t.$$

陥り易い間違いは，系のはじめの運動エネルギー $m_1v_1^2/2+m_2v_2^2/2$ が，衝突の結果すべて内部エネルギーに変化すると考えることである．これは，球が衝突後必ずしも静止しない，ということを忘れる結果生ずる間違いで，それは運動量保存則に矛盾する．系の初めの運動量 $m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$ は一般にゼロではない．したがって，エネルギーの総和には，終状態における球の運動エネルギーをも考慮しなければならない．

完全非弾性衝突の結果，結合した後の球の速度を v で表すと，エネルギーと運動量一より正確には最初の球の運動方向への運動量の成分一の保存則は，次のように書ける：

$$\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m^2v_2^2}{2}=\frac{(m_1+m_2)v^2}{2}+\Delta E_{in},$$

$$m_1v_1-m_2v_2=(m_1+m_2)v.$$

得られた3組の方程式を連立させて解き，温度上昇として次の値を得る：

$$\Delta t=\frac{m_1m_2(v_1+v_2)^2}{2c(m_1+m_2)^2}.$$

問題 2．質量 M_1 と M_2 の2台の車輌が，速度 $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ で対向して運動している．衝突したとき，4個の緩衝器の同じバネが圧縮され，それから車輌は離れた．ばねの定数が k のとき，おのおののばねの最大変形を求めよ．

［**解答**］　前問と違ってこの問題では，力学的エネルギーの保存則を用いることができ（摩擦は小さく，ばねは理想的であると仮定して），車輌のはじめの運動エネルギーを，ばねの変形 x が最大のときの系のエネルギーに等しいと置くことができる．すると求める量 x は，ばねの弾性変形のポテンシャル・エネルギー E_p に入ってくる：

$$E_p=4kx^2/2.$$

しかし他方で，このエネルギーのほかに衝突後の車輌の運動エネルギーを考慮しなければならない．

最も接近した瞬間にも車輌は静止していない（見落されがちな事実だが）ことは，前回と同様に運動量の保存則から導かれる．この瞬間の特徴は，ばねの最大変形の瞬間には，二つの車輌の速度が等しいことである：$v_1'=v_2'=v$．それゆえ，エネルギーと運動量（より正確にはその成分）の保存則は，次の形に書ける：

$$\frac{M_1v_1^2}{2}+\frac{M_2v_2^2}{2}=\frac{(M_1+M_2)v^2}{2}+4\frac{kx^2}{2},$$

$$M_1v_1-M_2v_2=(M_1+M_2)v_0$$

これから求める x が得られる：

$$x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{M_1M_2}{k(M_1+M_2)}}(v_1+v_2).$$

問題 3．（衝撃振子）質量 M の長方形の物体が，長さ l の2本の平行な糸で吊されており，質量 m の弾丸が水平に飛んで来てその中に突き刺って物体内に止った（図1）．この衝突の結果，糸は角度 α だけ鉛直線から傾いた．弾丸の初速度 v を求めよ．糸は理想的である（重さがなく，伸びない）と考える．

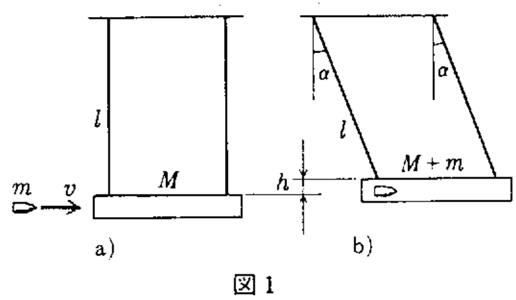


図 1

［**解答**］　図からわかるように，糸の傾きの角 α は物体の上昇する高さ h と次の関係にある：

$$h=l(1-\cos\alpha).$$

さらに，高さ h は物体と弾丸が静止したときのポテンシャル・エネルギー E_p と次の関係にある：

$$E_p=(M+m)gh.$$

この問題では，力学的エネルギーの保存則が成り立つかどうかを考慮しなければならない．換言すると，

終状態の系のエネルギーは，初めの状態の系のエネルギー，すなわち弾丸の運動エネルギー $mv^2/2$ に等しいだろうか？　答えはノーである．なぜならば，よく知られているように，非弾性衝突の際には力学的エネルギーの一部が内部エネルギーに変化する．

この変化はどのように起るだろうか？　衝突の起った直後に，弾丸は物体中に入り込んでいるが糸は未だ鉛直である状態を考えてみよう．この状態における系のエネルギーは，弾丸を含む物体の運動エネルギーに等しい：$E_k=(m+M)v'^2/2$．ここで v' は共通の速度である．非弾性衝突が終ってからはエネルギーは失われないから，次の関係が成り立つ：

$$E_k=E_p,$$

すなわち，

$$\frac{(m+M)v'^2}{2}=(M+m)gh.$$

運動量保存則によって，速度 v' は弾丸の初速度 v と関係づけられる：

$$mv=(m+M)v'.$$

h にたいする表式と最後の二つの式から，

$$v=2\left(1+\frac{M}{m}\right)\sqrt{gl}\sin\frac{\alpha}{2}.$$

この問題では，運動量とエネルギーの保存則は，同時にではなく，順番に適用されることに注意しよう．この事情を理解することは，そう簡単ではなく，エネルギー保存則だけをつかってこの種の問題を解こうとする誤りが多い．

問題4．質量 m，電荷 q の3個の小球が，3本の長さ l の理想的な糸で2個ずつ結ばれ，等辺三角形をつくっている（図2）．一本の糸を切ると，小球は運動しはじめる．運動の過程におけるまん中の球(3)の最大の速さを求めよ．重力の作用は無視してよい．

［解答］　系は閉じており，その中ではクーロン相互作用の力だけがはたらいているから，エネルギー保存則を用いることができる．さらに球1と3，および2と3の間の相互作用は，図2のa)の状態とb)の状態とで変らないから，考慮しなくてよい．するとエネルギー保存則は次の形になる（v と V は一般的には反平行でない）：

$$\frac{kq^2}{l}=\frac{kq^2}{r_{12}}+2\frac{mv^2}{2}+\frac{mV^2}{2}.$$

この一個の方程式だけからは，未知の速度 V だけでなく，その最大値も計算することができない．しかし系が閉じているので，さらに運動量の保存則を用いることができる．3個の小球の全運動量はいつもゼロである．したがって，運動量の成分にたいして次式を得る：

$$0=2mv\sin\alpha-mV.$$

さて，速度 V は小球1と2が最も離れたとき，すなわち $r_{12}=2l$（v と V が反平行）のときに最大になることがわかる．対応する式を解いて次の答を得る：

$$V=q\sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{ml}}.$$

この問題を解くときに，運動量保存の法則を用いることに気がつかないことが多いように思われる．

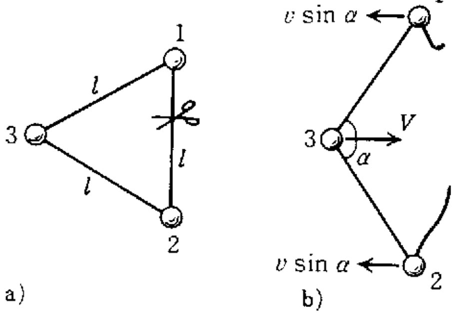


図2

問題5．長さ l，質量 M の物体が水平で滑かな表面上にあり，その上に質量 m の小物体が置いてある（図3）．物体と小物体の間の運動摩擦係数は μ である．物体が壁に弾性衝突したときに小物体が物体から落ちるためには，衝突する前の系の速度 v はどれだけでなければならないか？

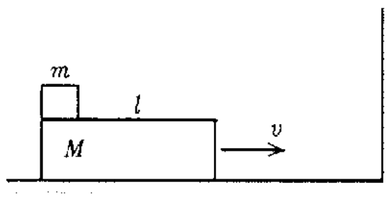


図3

［解答］　長方形の物体と壁との衝突により，物体の速度は瞬間的に向きを反対にする．小物体は衝突後すぐには速度を変えず，長方形の物体の上を滑りはじめる．

小物体がすべり終って停止するまでに，物体上を移動する距離 x を求めよう．明らかに，条件 $x>l$ は小物体が物体から落ちる条件である．距離 x は，すべり摩擦の力 F_{Fr} がなす仕事 A と次式で関係づけられる：

$$A=-F_{Fr}x=-\mu mgx.$$

これは他方で，系の運動エネルギーの変化に等しい．

$$A=\frac{(m+M)v'^2}{2}-\left(\frac{mv^2}{2}+\frac{Mv^2}{2}\right)$$

ここで v' は，衝突してから小物体が物体にたいする動きを停止した後の，物体と小物体の共通の速度である．この速度は運動量保存の法則から求めること

ができる：

$$Mv-mv=(M+m)v'.$$

3個の式を連立させて解いて，x にたいし次の答を得る：

$$x=\frac{2Mv^2}{\mu g(M+m)}.$$

条件 $x>l$ から，求める速度にたいする条件を得る：

$$v>\sqrt{\frac{1}{2}\mu gl\left(1+\frac{m}{M}\right)}.$$

仕事 A が，物体にたいする小物体の変位と力との積で与えられる理由は，次のように理解される．物体は停止していないので，小物体の地面にたいする変位 x_m は物体にたいする変位 x とは等しくない．系の力学的エネルギーの全変化は，物体と小物体とになされた仕事の和に等しいから，

$$A=(F_{Fr}x_m+(-F_{Fr}x_M))=F_{Fr}(x_m-x_M)=F_{Fr}x.$$

最後に，核反応の計算の問題を検討しよう．前問とは違って，この場合には運動量保存則のベクトル的性質がはっきりと現れる．

問題 6．重水素と3重水素の融合反応（$^2H+^3H=^4He+n$）を起すために，$E=2MeV$ まで加速した重水素核を3重水素核のターゲットにあてる．重水素ビームに垂直な方向に飛び出す中性子を検出器で記録する．この反応で $\varDelta E=14MeV$ が生ずるとして，記録される中性子のエネルギーを求めよ．

［解答］ この反応におけるエネルギー保存則は，次のようになる：

$$\frac{m_dv_d^2}{2}=E=\frac{m_{He}v_{He}^2}{2}+\frac{m_nv_n^2}{2}-\varDelta E.$$

（この式および以下の説明で，添字 d は重水素，He はヘリウム，n は中性子を表す）．運動量保存則は，x 軸（入射重水素の速度の向き）と y 軸（検出される中性子の飛行方向）の両成分に対して書かねばならない：

$$m_dv_d=m_{He}v_{Hex},$$

$$0=m_nv_n-m_{He}v_{Hey}.$$

$v_{He}^2=v_{Hex}^2+v_{Hey}^2$ であることをつかい，次式を得る：

$$\frac{m_nv_n^2}{2}\left(1+\frac{m_n}{m_{He}}\right)=\varDelta E+\frac{m_dv_d^2}{2}\left(1-\frac{m_d}{m_{He}}\right).$$

$m_n/m_{He}=1/4$，$m_d/m_{He}=1/2$ を用いると，この式から，検出される中性子のエネルギーが得られる：

$$E_n=\frac{4}{5}\left(\varDelta E+\frac{1}{2}E\right)=12MeV.$$

練習問題（正解は次回にのせる）

1．質量 M の四輪車が，なめらかな水平面の上を速度 v で運動している（図4）．質量 m のレンガが車の上に高さ H の所から落ちて来て，そこに停止する．

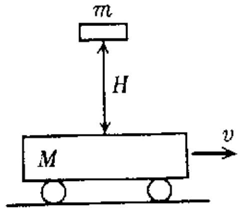


図4

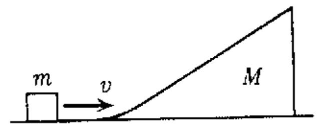


図5

衝突の際にどれだけの熱が出るか？

2．速度 $\vec{v}$ で飛んでいる原子核が，核反応の結果二つの破片に分れた．その質量は m_1 と m_2，速度は $\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ で，$\vec{v}_1$ と $\vec{v}_2$ の間の角は α であった．この反応でどれだけのエネルギーが出たか？

3．質量 M の長方形の物体がなめらかな水平面上に置かれており，ばね定数 k のばねで鉛直な壁に固定されている．水平に飛んで来た弾丸が物体に衝突して，その中で停止した．ばねの最大変形を求めよ．弾丸の質量を m，速度を v とする．

4．なめらかな水平面上に，質量 M のくさびが置かれている（図5）．速度 v で平面上をすべって来た質量 m の物体が，くさびに乗り上げる．物体がくさびに乗り上げる最大の高さはどれだけか？ くさびの下面と平面の間に，まさつは無いとする．

5．4輪車に台が設けられており，台に糸で小球がつるされている（図6）．球のついた糸は，はじめ鉛直線にたいして角度 α をなしており，それを放す．4輪車の得る最大速度を求めよ．台のついた4輪車の質量は M，小球の質量は m，糸の長さは l である．4輪車はなめらかな水平面上にあるとする．

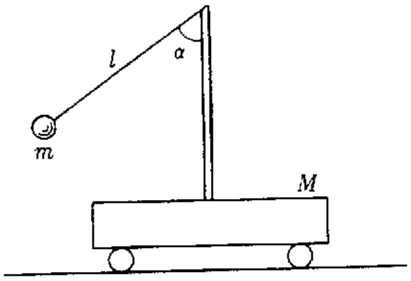


図6

物理・数理科学修士　A.I. チェルノウザン
（訳　こじま　ひでお）