「Cold Fusion へのメッセージ」　沢田哲雄（日大・理工・原子力研究所）

はじめに

今 cold fusion に関して物理学者に comment を求めると、非常に異なった二つの答が返ってくるはずです。一方は「こんなにはっきりとその存在を示す実験があるのだから、まずその事実を認めるべきである。」それに対して、もう一方は「我々はこのエネルギー領域では、よく検証された理論体系をすでに持っているのだから、その枠内で現象を理解すべきである。」とまあこんな具合です。この二つの communities が共通の言葉を持つようになる事を願ってこの随筆を書く事にしました。 Science にかかわる随筆では、式を全く使わない事を標榜するのが普通ですが、式が物事を正確かつ簡潔に述べるのに重要である事を多くの人が知っていますので、式を意図的に長い文章に置き換えるような事はしないで述べて行きます、しかし出来るだけ読む事の出来る層を広げておきたいので、大学３年生程度の知識があれば読めるように工夫して行くつもりです。ここでは次の４つのトピックを考えていきます。ただし荷電の discreteness の所は長いので、古典部分[C] と量子部分[Q]に分割しました。

- ◆　なぜ量子論を捨てる事が出来ないか：Lamb shift と異常磁気モーメントの例
- ◆　この世界が forma (形相) と materia (質料) で成り立っているという説について
- ◆　自然界に現れる荷電は何故、とびとびなのか [C and Q]
- ◆　magnetic monopole があると、この世界の風景はどのようになるか

1. ラム・シフトと電子の異常磁気モーメントについて

物理の中には、非常に精密に測定できて、６桁・７桁とその数値を決定できる量があります。いくつか例をあげますと、fine structure constant を α と書きますと、その逆数は $1/\alpha = 137.0359895(61)$ で、その誤差を ppm で云うと 0.045 です。また Lamb shift は $E/\mathrm{h} = 1057.864(12)$ MHz で、誤差は 12 ppm 程度です。

最後にもうひとつ electron magnetic moment anomaly は $(g-2)/2 = 0.001159652193(10)$ と測定されているので、誤差は 0.009 ppm です。ここで重要な事は、後の二つは α が与えられている時、量子論から計算する事ができ、それが測定値と誤差が現れる桁まで６桁・７桁にわたって、ぴたりと一致する事です。そして量子論のルールの小さな変更も、この一致を壊してしまう可能性があると言う事です。

折角ですから、どれか一つに説明を加えておきましょう。Lamb shift は電子と陽子の二体系であるのに対して、$(g-2)/2$ の方は（外磁場の中での）電子の一

体問題なので、ずっと単純で精度も高くなっているのでそちらにしましょう。Ampere の等価磁石より、荷電 e 質量 M の粒子が半径 r の小さな円周上を速度 v で走っている時、それと等価な magnetic moment は $m = IS = (ev/2\pi r)\pi r^2$ になります。 ここで括弧の付け替えをしますと $\boldsymbol{m} = (e/2M)(\boldsymbol{r} \times M\boldsymbol{v})$で軌道角運動量に比例します。$(h/2\pi)\boldsymbol{L}$ と軌道角運動量を書く事にしますと $\boldsymbol{m} = (eh/4\pi M)\boldsymbol{L}$ となり、その係数は Bohr magneton です。次に、もっと一般の角運動量 J の場合は係数が変わるかもしれないので $\boldsymbol{m} = g(eh/4\pi M)\boldsymbol{J}$ のように用心のために factor g を入れておきます。

電子のスピンでは $J = \sigma/2$ で σ の各成分の固有値は ± 1 ですから、分母の 2 が邪魔をして、$g = 2$ に取らないと実験で分かっている値 1 Bohr magneton になりません。このスピ ンに対して g が 1 でなく 2 になることが初期の量子力学の頃、余程不思議であったらしく「スピンの異常 g-factor」と呼ばれていましたが、Dirac 方程式が出ると自動的にスピンに対して $g = 2$ が導けますので、もはや「異常」とは思われなくなりました。 その後、スピンの g が 2 よりも 0.1 パーセントほど大きい事が分かってきましたので、むしろそちらの方を異常磁気モーメントと呼ぶようになりました。最初にこの量を計算したのは J. Schwinger でその値は $(g-2)/2 = \alpha/(2\pi) = 0.0011614...$でした。これは摂動の最初の近似で e^2 項です。この段階ですでに、はじめに示した高精度の実験値からのずれは 0.2 % 以下です。更に e の 4 次 , e の 6 次--- と計算を進めて行くと、実験との一致はよくなり、一致は 7 digits, 8 digits に渉ります。

このような一致は何も electron の 異常磁気モーメントに限った事ではなく、muon の 異常磁気モーメントや Lamb shift でも同じ事が起こりました。そのようなわけで、量子論の修正----例えば ground state の下にもうひとつ level があると云ったような----には慎重にならざるを得ません。しかし、Lamb shift で陽子の果たした役割が単にクーロン外場を提供するだけであると見なすと、高精度で検証されたのは外場中を運動する electron や muon の系のみと云う事になります。それで、我々が護らなければならないのは、量子論の形式とそれに上に述べた道具立て、つまり系が electron や muon を素材として出来ている場合、だけかもしれません。ここで、この随筆のあと後まで現れる二つのキーワード「形式」と「素材」が出てきましたので、次に少しその説明をします。

2. この世界が forma (形相)と materia (質料)で成り立っている、という説について

ここで、実際に量子力学を使っていろいろの問題を解く事を考えて見ましょう。我々は当然のように対象となっている system に対応する Hamiltonian を先ず書いて、それを固有値問題などにして level を 出したり、散乱振幅を求めた

りするでしょう。そのようなわけで、対象を 理解するには量子力学の枠組みを知っているだけでは不十分で、対象の 系を作っている素材に関する情報がぜひ必要です。Lamb shift を 計算したければ、対象は hydrogen atom ですから、electron と proton が素材で、その間に Coulomb potential が働いている Hamiltonian に なります。 一方、deuteron の binding energy が欲しければ、素材として proton と neutron をとりその間に核力ポテンシャルが働いているといった具合です。

ここでちょっと哲学の授業で学んだ eidos と hyle について思い出しておきましょう。今我々が直面している問題と素晴らしい対応関係があります。まず「質料」(質量ではない) という言葉を広辞苑 (新村出編) で引いて見ますと次のようにあります:

質料:「 [哲] (matter 英, hyle ギリシャ) 形式を具備することによって、初めて一定のものとなる材料的なもの。アリストテレスは、質料を形相と共に存在の根本原理と考えた。 質料因: アリストテレスが説いた四原因の一つ。 ここに四原因とは、形相因、質料因、目的因それに動力因のことである。」

一方「形相」(これは 'けいそう' と読んでください 'ぎょうそう' でなく) を調べると、

形相:「 [哲] (form 英, eidos ギリシャ) 形式の意で、質料をして一定の現実的形態を採らせる原理。アリストテレスに始まり、以後中世哲学においていろいろに用いられた重要概念。」

とあります。次にラテン語ではどうだったかを知るために Webster を調べるとそれぞれ materia と forma で共に英語に近い形をしています。今後、「質料」「形相」のことを、ラテン語・ギリシャ語が混ざってしまいますが hyle, forma と書いて行くつもりです。

ここで落語的になりますがちょっと息抜きのために、アリストテレスがどれくらい偉いかについてお話します。 この話は私が駒場の一年生だったとき、クラス担任だった今掘和友先生から彼の最初の化学の授業で聞いたものです。今堀先生によると、哲学者の K 先生 (イニシャルだけにしておきます) の書かれた哲学の本の最初の文は「アリストテレスから K に到る、たまたまカントあり。」といった気宇壮大なものだったそうです。今堀先生は「そんなふうに書かれるくらいアリストテレスは偉大だったのだ」と云ったきりで、ギリシャの自然哲学における元素の方に話を進めて行きました。私はその時、キツネにつままれたような気分になった事を今でも覚えています。

今から考えてみると、原子核の研究で 1930 年代に何を素材とするべきかで混乱がありました。1932 年に Chadwick が中性子を発見するまでは我々のてもとには三つの素粒子---電子・陽子・光子---しかありませんでしたので、例えば

deuteron を作る素材 hyle として荷電的には電子一個と陽子二個を取りたいところですが、これでは複合系のスピンは半整数になって現実の deuteron の spin 1 は出てきません。今日では deuteron は proton と neutron を素材とする結合系としてよく理解されています。もし中性子を欠いたまま原子核を組上げて行くとしたら、それは相当の難工事になった筈です。以上のことから、ある対象とする系を理解しようとする場合、その系を構成する ingredients の選択が適切でないと、いくら forma の方が正しくても、うまく理解する事が出来ない事が分かります。次の section で、同じ量子力学を使っても、ingredient, hyle が異なるとがらりと違った世界が現れる事をお目にかけましょう。（次号に続く）

3. 自然界に現れる電荷は何故、とびとびなのか [C]

物理学者の仕事ぶりを見ていると非常に異なった二つの向きがある事が分かります。

一つは学生時代から慣れ親しんだ方向で、基本法則は分かっていて系の構成要素 hyle も与えられていて、何々を計算せよ、と言うタイプのもので、これは論理の chain を伝って結論を出す事が出来ます。試験問題の大部分はこの向きのものです。

もう一方は新しい自然法則を見出す向きです。 こでは論理の鎖を伝ってと言うわけには行きません。豊かな想像力が要求され、科学者が artist のように見える時です。原則的には trial and error で探す以外に方法はありません。これは科学者が行う仕事のうちもっとも素晴らしい部分です。その他にも、この向きの仕事があります、つまり想像力が要求される向きのものです。それは法則そのものを変えないでそのままにしておいて、系の素材 hyle を選択して行く場合です。この時も trial and error で探す事が必要で、やはり imagination が要求されます。これは珍しい現象が確認されて、それらが基本法則プラス従来の hyle の入れ方から出て来る系としてでは、うまく理解できないとき、新しい素材から出発して現れる系をいろいろと探して行く必要があります。

Cold Fusion は今そんな場所にいるのではないかと私は思っています。基本法則が同じであるならば、いくら素材 hyle を代えてみても、似たような系が出て来るだけだと思っている人は多いと思います。前の例では、e-p から水素原子が、n-p から deuteron が出てきて、energy scale の違いを別にすればあまりかわり映えのしないものではないか、という意見があります。

しかしこの section と次の section では、そうでない例、新しい hyle を採るによってがらりと変わった世界が出現する例をお目にかけます。

ここでの素材は、荷電を帯びた粒子と磁荷を帯びた粒子です、またこれらを扱う枠組み forma の方は量子論であるとします。量子論に入る前に磁荷とか

magnetic monopole について説明をしておきます。その出発点は Maxwell の方程式が審美的に奇妙な形をしている事です。つまり真空中では Maxwell equations は電気的なるものと磁気的なるものが対称的に現れています(duality 対称)。

しかし source, current が入るとこの対称性はなくなります。 例えば div D= ρ に対し div B = 0 となっていて電荷密度 ρ に対応する所に磁荷密度 ρ 'が入らず恒等的にゼロと置かれています。このため電場と磁場の対称性は壊されています。しかし二番目の式を div B = ρ ' のように変えておくとその対称性は保持されます。しかも、問題を解く場合には、我々の普通の実験条件では ρ ' = 0 ですから、解いた結果はどちらを使ってやっても同じです。

そのようなわけで基本法則として {div D= ρ and div B =0}、{div D= ρ and div B = ρ '}のどちらを採用してもよかったのです。内容は、前者が「magnetic monopole は絶対にない」に対し、後者は「magnetic monopole の存在を排除出来ない」と言うものです。歴史的に見て div B = ρ 'が出てきたのは一方の極を取り出そうとして長い磁石を切断しても、二つの短い磁石になるだけで magnetic monopole を取り出す事はどうしても出来ないと言う経験事実から帰納したものです。

Maxwell equation の残りの式に関しても

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \partial \mathbf{D}/\partial t = \mathbf{i}$$

に duality 変換 (**E** → **H** and **H** → - **E**) を施して得られる式

$$-\mathrm{rot}\,\mathbf{E} - \partial \mathbf{B}/\partial t = \mathbf{I}'$$

は duality 対称性を持っています、ここに **i'** は磁荷の流れです。 この i' 項を強制的にゼロと置いたのが Maxwell equation での電磁誘導の式です。最後に duality symmetry を持つように修正された Maxwell equations をまとめて書いておきます。

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho, \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{H} - \partial \mathbf{D}/\partial t = \mathbf{i},$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = \rho', \qquad \mathrm{rot}\,\mathbf{E} + \partial \mathbf{B}/\partial t = -\mathbf{i}'.$$

ここから、電荷と磁荷が共存する系を量子論的に扱うわけですが、その前に重要だがあまりよく知られていない事実を確認しておきます。それは電荷 Q の粒子と磁荷 Q'の粒子の系は、それらが静止していても角運動量 -QQ'$\mathbf{r_0}$ を持っていることです。もしお互いに回転していて軌道角運動量 **L** がある時、時間的に保存するのは、それらの和 ($\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ - QQ' $\mathbf{r_0}$) です。ここで $\mathbf{r_0}$ は単位ベクトルで磁荷から電荷を結ぶ方向を向いています。 今、電荷を持つ粒子の質量を m とし、他方磁荷を持つ粒子の質量を無限大にとって原点に固定しておくという、単純化した場合について証明しておきます。

やり方は、中心力のときの **L** の保存と同様です。 ただ違いは、力がクーロン

磁場
のなかで荷電粒子が感じるローレンツ力であると言う事で、運動方程式は

$$m\, d^2\mathbf{r}/dt^2 = Q\, \mathbf{v} \times Q'\mathbf{r}/r^3$$

となり、**r** との外積を作ると

$$d/dt(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = QQ'[\mathbf{r} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{r})]/r^3 = QQ' d/dt(\mathbf{r}/r)$$

となって($\mathbf{r} \times \mathbf{p} - QQ'\, \mathbf{r}$)が保存量である事が分かります。ここでこの量の二つの項は互いに直交している事に注目してください。 ここから量子論に移ります。

4. 自然界に現れる電荷は何故、とびとびなのか [Q]

量子論では角運動量の、ある軸（量子化軸）に関する成分は、$h/4\pi$ の整数倍しかとる事が出来ません。**r** 方向に量子化軸をとると、$-QQ' = nh/4\pi$ が出ます、これが Dirac の charge quantization condition です。この式は今後よく使いますので標準形で書いておきます：

$$QQ'/hc/2\pi = n/2 \;(n = 0,\ \pm 1、\pm 2、\text{---}) \qquad \text{(Dirac)}$$

ここで c が分母に現れたのは SI 系から Gauss 系に移ったからです。このDirac のものに対して Schwinger は、今の場合の対象は幾何学的なものだから角運動量は $h/2\pi$ の整数倍のみをとり、半整数倍の方はとるべきではないと主張しました。Schwinger の charge quantization の方は：

$$QQ'/hc/2\pi = n \;(n = 0,\ \pm 1、\pm 2、\text{---}) \qquad \text{(Schwinger)}$$

です。 どちらが正しいか、まだ settle していませんので、今後はそれぞれから出した結論を併記する予定です。我々は一番小さな電荷（電荷素量）e を知っています。その２乗を dimensionless にしたのが fine structure constant で $e^2/hc/2\pi = 1/137.036$ です。

他方、磁荷素量 e' の方は上の式から求まります。それには QQ' を e e' に代えて n = 1 と置くと得られます。よく使う式なので書いておきます：

$$e'^2/hc/2\pi = (1/4)(1/(e^2/hc/2\pi) = 137.036/4. \qquad \text{(Dirac)}$$

$$e'^2/hc/2\pi = (1/(e^2/hc/2\pi) = 137.036/4. \qquad \text{(Schwinger)}$$

これらの数値から分かるように、磁荷素量間のクーロン力は super strong で電荷素量間のそれの約 5,000 倍(Dirac) から 20,000 倍(Schwinger) の強さがあります。

考えてみるとこれは皮肉な事で、もともと我々は磁気的なものと電気的なものが形の上では対称に現れるという duality から出発しましたが、numerical には電気と磁気は大きく非対称になっていて、ionize する事は、電気については簡単ですが、磁気にとっては容易ではありません。また、たとえ磁荷が単離されていたとしても、逆符号のものを呼び寄せて固い結合状態を作ってしまいます。 そのため１９世紀の物理学者が、磁荷密度やその current が来るべきとこ

ろを、当然の事のようにゼロと置いてしまった理由がわかるような気がします。

最後にこの section の表題「自然界にあらわれる電荷は何故、とびとびなのか」について考えます。Millikan の oil drop の実験以来、我々はこの世界の電荷 Q が、とびとびである事を知っています。これは素粒子の粒子性が原因と考えられて来ました、つまり1個の電子の帯びている電荷を e_e とした時、電子の集団の電荷 Q は n を整数として ne_e になり、とびとびです。 同様に、陽子の集団では $Q = n\,e_p$ になります、ただし1個の陽子の帯びている電荷を e_p としました。このとびとびのピッチは一般には集団によって異なります。現在 atom の neutrality の実験より

$$|(|e_e| - |e_p|)/e_p| < 10^{-22}$$

が分かっています。これは変化する電場をかけて圧力の変化を detect するマクロな実験ですから、アボガドロ数 (の逆数) 程度の精度で出せます。 一般に -e と e は何パーセントかずれていても、別に不思議ではないのですが、こんなに高精度で一致していることから、背後に何か電荷の出方を縛っている自然法則があることを予想させます。実は上で述べた charge quantization condition がそれです。というのは、どんな種類の粒子が混在していても、 系のとり得る荷電の量は Dirac case では $Q = (hc/4\pi e')n$ ですから、電荷素量は一つしかない、各粒子毎にあるのではない、と言う結論が出てきます。 これは上の超精密実験の結果とよく一致します。これにより magnetic charge の存在する蓋然性がぐんと高くなって来ました。

そのことから私は研究テーマを「magnetic monopole があると、この世界の風景はどのようになるか」に絞って来ました。 今まで取り入れていた素材 hyle に magnetic monopole という hyle を付け加えると、自然はずっと豊かになります。

最後に、その豊かになった部分の例を三つほど挙げておきます。第一は、すぐ上で述べたように、$-e_e$ と e_p が 21 桁に渉って一致するという事実を新しい視点 charge quantization condition から理解できるようになった事です。二番目は前に言ったように magnetic monopole は逆符号の monopole と結合して、磁気的に中性の bound state を作りますが、その複合体の振舞いや性質を調べる研究がスタートした事です。(dyon model of hadron)

三番目は、単離した magnetic monopole には大きな anomalous magnetic moment を持った軽い原子核を吸着して bound states を作るという性質があり、融合反応の触媒としても働きます。更に自らは希土類原子のような magnetic moment を持っている原子の結晶にトラップされやすいという性質をもっているということです。このように magnetic monopole のある世界は cold fusion reaction がごく普通に起こる環境を提供しています。

5. 核融合反応の触媒としてのmagnetic monopole

1982年前後ですが、人々は磁気単極子を捕まえようと躍起になっていました。それ以前にも、磁鉄鉱にトラップされているかもしれない磁気単極子をパルス状の磁場をかけて引っ張り出そうという試みが後藤英一さん達によってなされた事はありましたが、はっきりした結論は得られませんでした。その頃、人々は宇宙の始りの big bang で創られた筈のmonopoleをdetectしようと考えていました。理由は忘れましたが、光速の 1/30 というひどく遅い（素粒子屋の感覚では）ものだと思われていました。１５０億年も宇宙空間を漂った果てに地球にやってきたものです。私は、そのmonopoleが星間物質（主としてprotonで、少しばかり他の軽い原子核が混っている）で汚れて(contaminate)いるに違いないと思い、その様子を理解する事が detection に役立つに違いないと考えて、水素やヘリウムなどの軽い原子核とmagnetic monopoleの作るbound statesのenergy levelsや波動関数を計算しました。幸いな事に、1976 のT.T. Wu and C.N. Yangの論文で、荷電粒子とmagnetic monopoleが共存する系を量子論的に取り扱う方法は分かっていました。シュレーディンガーの論文から５０年もの間そのような系の計算が出来なかった事を不思議に思う人がいるかもしれません、そこでここでは何がネックになって計算が出来なかったのか、また波動関数の概念を少し拡張することによって、いかにしてその困難を迂回することが出来たかについてお話します。

電磁場の影響をシュレーディンガー方程式にとり入れるには、gauge置き換え

$$-i\nabla \to -i\nabla - (Ze/c)\vec{A} \qquad (10)$$

をする事によって達成されます。ここで $\vec{A}$ はvector potentialで、

$$\vec{B} = rot\vec{A} \qquad (11)$$

です。特に今の場合は$rot\,\vec{A}$がクーロン磁場になるようなものです。そのようなvector potentialの存在に関して二つの異なる意見があります。一つはdiv rotは恒等的にzeroだから$div\ rot\ \vec{A} = {}^*e\,\delta^3(\vec{r})$ を満足する$\vec{A}$は存在しないというものです。もう一方は、具体的に$\vec{A}$として

$$\vec{A}^{(a)} = {}^*e\frac{(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\phi} \quad (北) \qquad (12)$$

又は

$$\vec{A}^{(b)} = -{}^*e\frac{(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}\hat{\phi} \quad (南) \qquad (13)$$

と取っておけば、そのrotationはクーロン磁場${}^*e\,\hat{r}/r^2$になるのだから存在に問題

はないというものです。これが正しい事を確かめるには公式

$$\nabla\times\vec{A}=\hat{r}\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right]$$

$$+\hat{\theta}\frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right]+\hat{\phi}\frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta-\frac{\partial A_r}{\partial\theta})\right]$$

を思い出すだけで十分でしょう。ただし $\hat{r},\hat{\theta},\hat{\phi}$ はそれぞれ r,θ,ϕ が増加する方向を向いた単位ベクトルで、地球の表面で言えばそれぞれ、天頂、真南、真東を向いた単位ベクトルと言う事になります。ここでもとにもどって、二つの意見のうちどちらが正しいかですが、実はどちらも正しいのです。というのは $\vec{A}^{(a)}$ や $\vec{A}^{(b)}$ はregularな関数でなくそれぞれ $\theta=\pi$、$\theta=0$ の所にsingularityがあります。つまり $\vec{A}^{(a)}$（北）は z-軸の負の部分、$\vec{A}^{(b)}$（南）は z-軸の正の部分にstring（Dirac string)がありCoulomb磁場として等方的に出ていったmagnetic fluxがstringを通じて還流して来ていたのです。このことは、stringのまわりに半径 ε の小さなcontourをとってStokesの定理を使うと確める事が出来ます。というわけで、$\vec{B}=rot\,\vec{A}^{(a)}$ は原点に湧点はありません。この事は、本物のクーロン場との決定的な違いです。でも南極点の近所さへ除いておけばクーロン場になっている事も確かです。

Wu and Yangのideaというのは次のようなものです。vector potentialの定義域を北半球と南半球の二つに分け、それぞれで使うポテンシャルは $\vec{A}^{(a)}$（北と $\vec{A}^{(b)}$（南であるとします。二つの定義域に少し重なりを持たせるために、北の領域を赤道を少し南に越えて広げておきましょう。南の領域についても同様です。

このようにすると赤道の近所に重なり合う領域が出来て、そこでは差 $(\vec{A}^{(b)}-\vec{A}^{(a)})$ が定義できます、それは

$$\vec{A}^{(b)}-\vec{A}^{(a)}=-\left(\frac{2*e}{r\sin\theta}\right)\hat{\phi}=\nabla(-2*e\,\phi) \qquad (14)$$

ここで重要な事は、その差が何物かのgradientになっているという事です。この最後の式が正しい事をチェックするには、球座標でのgradient

$$\nabla\Lambda=\hat{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial r}+\hat{\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial\Lambda}{\partial\theta}+\hat{\phi}\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Lambda}{\partial\phi} \qquad (15)$$

を思い起こすだけで十分でしょう。rot gradが恒等的にzeroである事より、一般にvector potentialを $\vec{A}\ \to\ \vec{A}\ +\nabla\Lambda$ と変換しても同じ磁場 $\vec{B}$ を与えます。この変換のことをゲージ変換と呼びます。また磁場 $\vec{B}$ こそが物理的に意味があるので、結果はゲージ変換で変わらないはずです。この事をゲージ不変性と言います。

面倒が起こるのは要するに、磁場$\vec{B}$が物理的なものであるのに対し、シュレーディンガー方程式に現れるのはvector potential磁場$\vec{A}$であって磁場$\vec{B}$ではないということによります。先に述べたゲージ置き換えと組み合わせると、ゲージ変換は結局$-i\nabla \to -i\nabla - (Ze/c)\nabla\Lambda$なる変換です。これでは基本のシュレーディンガー方程式自身が変わってしまうではないかと、心配になるかも知れませんが実はこの形は$\psi(\vec{r})$が変換前の波動方程式の解とすると、変換後の解が$\exp[i(Ze/c)\Lambda]\,\psi(\vec{r})$である事が示せますので、結局違いは位相(phase)だけになり物理的内容は変更を受けません。これらの事どもは、量子力学をやった事のある人であれば誰でも知っている事ですから、これ以上述べない事にします。ただ強調しておきたい事は、Wu-Yangのideaに現れた北半球用のvector potential $\vec{A}^{(a)}$と南半球用vector potential $\vec{A}^{(b)}$ は$\Lambda = (-2*e\phi)$で特徴づけられるゲージ変換で結びついているという事です。またこれに対応して、南側の波動関数は、そのoverlapping domainで北側の波動関数に位相$\exp[-2i(Ze*e/c\hbar)\,\phi]$をかけたものになります。(今まで $\hbar=1$ の単位でやってきましたが、後の便宜のため $\hbar$ を復活させて書いておきました。)

まとめますと、原点に固定したmagnetic monopoleの作るクーロン磁場の中の荷電粒子の運動を扱うのに必要なvector potentialは、一つの関数で表わそうとするとDirac stringが出てしまってうまく記述できないけれども、全領域を二つに分割して各々の領域に別々のfunctionをassignしておき、さらに境界付近のoverlapping regionではそこで定義されているfunctionsの間にお互いにゲージ変換で結ばれているといったようなある種の関係があるとするとうまく行って、rotationをとると純粋のクーロン場になります。このようなものを C.N. Yangはfunctionと区別してsectionと名付けました。落ち着いて考えてみると、このような概念は物理屋にとっては珍しいかもしれませんが、数学者にとってはごく普通に使ってきた事です。ちょっと多様体に座標を入れる時の事を考えてみて下さい。全体を一つの座標でcover出来るなどと考える人はいないでしょう。

ではここで具体的に、角運動量の二乗とその z-成分の固有値と固有関数を計算します。普通の中心力ポテンシャルV(r)の時それは球関数$Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$で、L^2及びL_zの固有値はそれぞれ $\hbar^2\ell(\ell+1)$ 及び $\hbar m$ である事はよく知られています。中心

力の時は、変数分離 $\psi(\vec{r})=R(r)Y(\theta,\phi)$ の形に書けて、Yは球関数になります。

magnetic monopoleが原点にある場合もV(r)が中心力ポテンシャルの時、やはり変数分離になりますが、YはL^2及びL_zのeigen sectionになります。Yangはこれを球関数spherical harmonicsに対してmonopole harmonics と呼んでいます。

ではこのmonopole harmonics $Y_{q,\ell,m}(\theta,\phi)$を求めましょう。このYはindex ℓ,m の他にextra angular momentum $q\equiv Ze^*e/c\hbar$ にdependします。q=0 でもとの球関数に戻ります。角運動量ベクトルは

$$\vec{L}=\vec{r}\times(\vec{p}-(Ze/c)\vec{A})-q\,\hat{r} \qquad (16)$$

で右辺の第１項が軌道角運動量、第２項が今の場合特有のextra angular momentumで、両者は互いに直交している事に注意してください。$\vec{L}$ の成分の間には例の交換関係

$$[L_x\,,L_y\,]=iL_z \qquad etc. \qquad (17)$$

が成り立っています。それを使えば、L^2 と L_z の同時のeigen-section $Y_{q,\ell,m}(\theta,\phi)$ を出すのはそれほど難しい事ではありません。そのやり方と結果は Wu-Yangの論文（Nucl. Phys. B107, 365, '76）を見てください。ただここで強調しておきたい事は、ℓ,mのとり得る範囲が$\ell=|q|,|q|+1,\cdots$ 及び$m=-\ell,-\ell+1,\cdots,\ell$であるという事です。それにDiracのcharge quantization conditionより、q は整数か半整数であるという事も思い出しておいて下 さい。 またこのY がfunctionではなくsectionで、北と南の領域で別々の関数になっていて、赤道付近のつなぎの所で $\exp[-i2q\phi]$ 位相がとんでいます。実はWu-Yangの論文で導入されている monopole harmonics $Y_{q,\ell,m}(\theta,\phi)$は、我々がすでによく 知っているWigner の d-関数で表せます（たいていの原子核の教科書にその テーブルが載っています）:

$$Y^{(a)}_{q,\ell,m}(\theta,\phi)=\sqrt{(2\ell+1)/4\pi}\;e^{+iq\phi}\;d^{(\ell)}_{-q,m}(\theta)\,e^{+im\phi} \quad in \quad (北) \qquad (18)$$

and

$$Y^{(b)}_{q,\ell,m}(\theta,\phi)=e^{-i2q\phi}\;Y^{(a)}_{q,\ell,m}(\theta,\phi) \quad in \quad (南) \qquad (19)$$

これでどんなV(r)に対してもbound stateのエネルギーを計算したり散乱問題を解いたり出来ます。幸い変数分離をした時、角度の方はsectionになる事は上で見たとうりですが、動径のほうはfunction R(r)で、その方程式は

$$[\frac{d^2}{dr^2}+2ME-\frac{1}{r^2}(\ell(\ell+1)-q^2)-2MV(r)](rR(r))=0 \quad (20)$$

になります。

5-1 spin 0 の粒子とmonopoleの系

上の式で特にV(r)=0とした式のの波動関数は

$$R(r)=\sqrt{\frac{k}{r}}J_{\mu}(kr) \quad with \quad \mu=\sqrt{(\ell+\frac{1}{2})^2-q^2} \qquad (21)$$

になります。ただし、$k^2=2ME$ です。q=0 では平面波の部分波射影になるので当然の事ながら球ベッセルになります。また E < 0 には意味のある解はありません。そのためpionや^4Heのようなspin zeroの粒子とmagnetic monopoleのbound stateは存在しません。

5-2 spin 1/2 の粒子とmonopoleの系

protonや^3Hや^3Heそれにneutronのようなspin 1/2で大きなanomalous magnetic momentを持った粒子（cold fusion でのfuel particle はdeuteronを除いてこのcategoryに属する ）がモノポールと結合状態を作る事は十分予想できる事です。ただし、二つのスピン状態 $(\vec{\sigma}\,\hat{r})=\pm1$ のうち $\kappa(\vec{\sigma}\,\hat{r})>0$ の方のみが引力になりbound stateを作ります。なおκ はnuclear magneton $e/2M$単位で測った異常磁気能率でneutronだけはマイナスで $\kappa_n=-1.91$です。この事を確め、energy levelを計算するには、spin 1/2の粒子に対するSchrödinger方程式を書いておけばよいわけですが、それには外場の中のDirac方程式を書いて、それの非相対論近似（Pauli 近似）を作るのがお勧めです。ただこのとき、Dirac方程式にPauli項$\kappa(e/2M)(1/2)\sigma_{\mu,\nu}F^{\mu,\nu}\psi$ を付け加えておく事を忘れないで下さい。特に外場magnetic charge $*Q$の磁気的クーロン場の時はこの付加項は$\kappa *Q(e/2M)(\vec{\sigma}\,\hat{r})/r^2\,\psi$です。ただしこの場合$\psi$は２成分spinorです。この式を使えば、エネルギーの固有値問題、散乱問題それに吸着の問題を正確に解く事が出来ます。

5-3 spin 1 の粒子とmonopoleの系

spin 1/2の粒子がDirac equationで扱えたように、spin 1のpoint particleはDuffin-Kemmerの式で扱えます。deuteron はbinding energyが小さく、その半径が大きいので、核内部の波動関数は変わらないものとしてdeuteronをpoint particleとして扱う近似がよいかどうかは疑問が残ります。実際、deuteronは二つの核子(protonとneutron)が S-波状態で結合していて、その全スピンは S=1つまりtriplet stateになっています。一方spin singletの方は、少しばかり核力ポテンシャルの引力が弱いので、bound stateを持つ事は出来なくて、virtual stateになっています。これは自由場のときそうですが、monopoleの近所では様子が違います。もともとdeuteronでは核子のスピンは同じ方向を向いていてmagnetic momentは、p が $(1+\kappa_p)=2.79$で、n では$\kappa_n=-1.91$なので、これがcancelし合ってdeuteronでは0.86 程度の小さなものでmonopoleに強くboundされるという事はありません。しかし、もしneutronのスピンがflipしてお互いに逆向きになると、全magnetic momentは 4.6 となって、深くモノポールと結合します。このため deuteronがmonopoleに近づくに従ってspin-singlet成分が混入してきて、すっかり原子核の波動関数が変わってしまいます。そのためもはやpoint particleとして扱う事は許されなくなり、deuteronを核力ポテンシャルを使って p と n から組み立ててくる必要があるので、取り扱いはずっと複雑になります。そのためここではそれについて述べるだけのスペースがありません。

5-4 結晶に trap されたmagnetic monopole

結晶にtrapされたmagnetic monopoleのbinding energyの大体の値を知るために、次のような超簡単なモデルを考えてみましょう。間隔が1 Å の結晶格子の上に 1 Bohr magneton $e\hbar/2m_e$ のmagnetic momentが付着していて、その向きはrandomであるとします。それとmagnetic monopoleが入ってきて、格子上のmagnetic momentがmonopoleを中心にして球対称に整列し、半径 r_T の外ではrandomのままであるとします。ただし、半径 r_T は温度 T の熱攪拌とそこでのmagnetic momentのエネルギーが等しくなる所です。問題は、そのエネルギー差 E_Tと半径を求めよ、というものです。それらは $1/\sqrt{T}$ に比例します。答えは、Dをmagnetic chargeとして、それぞれ

$$E_T = (\frac{D}{2})^{3/2} \frac{14.24\,keV}{\sqrt{T}} \quad and \quad r_T = \sqrt{\frac{D}{2}} \frac{2.97 \times 10^{-6}\,cm}{\sqrt{T}}$$

になります。

5-5 まとめ

5-1 から 5-3 で述べた事から、magnetic monopoleには、核融合反応の触媒としての性質があることが分かります。つまり、p, n, ^3H, ^3Heのような anomalous magnetic moment を持った原子核を引きつけて半径 $10^{-12}cm$ 程度のbound stateを作りますので、fuelの密度はプラズマによる核融合のときの $10^{15}/cm^3$ にくらべて 10^{21} も大きい事がわかります。そして最終的にはこれらは ^4Heになって20 MeV程度の大きなエネルギー放出しますが、spin 0 のためモノポールを離れて行くので、monopoleはもとのfreshなモノポールに戻ります、このようにして触媒としての役割をはたして行きます。もう一つ重要な役割は、

$p + {}^3H \rightarrow {}^4He$ や$n + {}^3He \rightarrow {}^4He$、更に$d + d \rightarrow {}^4He$のような２体から１体への反応は自由空間ではエネルギー保存と運動量保存に矛盾するので起こりませんが、今の場合はモノポールが運動量を吸収できるので矛盾がなくなり、これらの反応が起こります。

以上の事は、電極を使ったcold fusionとは関係なく、言える事です。実際、この計算は1983年にmagnetic monopoleを触媒とした常温で作動する核融合炉をdesignする目的のためになされたものです。最近電極を使った実験が多く現れてきましたので、それと組み合わせて考えるといろいろと面白い事が導けるのではないかと期待しています。